En écoutant Claude Benzaken, on ne s'ennuie jamais ; ne serait-ce que le spectacle ! Il n'en va pas de même avec tous les orateurs. Qui, honnêtement, parmi vous ne s'est jamais ennuyé en écoutant un exposé de mathématiques ?

Peut-être est-ce le cas présentement, alors que je n'ai encore rien dit ?

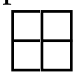
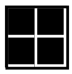
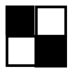
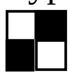
Toujours est-il qu'il m'est arrivé de m'ennuyer. Que faire alors si on n'a pas pris la précaution de se mettre près de la sortie pour s'éclipser en douce, ou si la sortie est juste derrière le conférencier ?

Personnellement je gribouille et gamberge. J'élucubre (toujours discrètement, çà va de soi !).

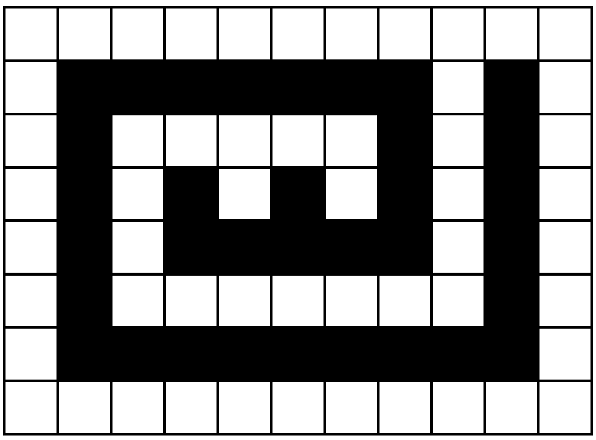
Voici un résultat de mes élucubrations :

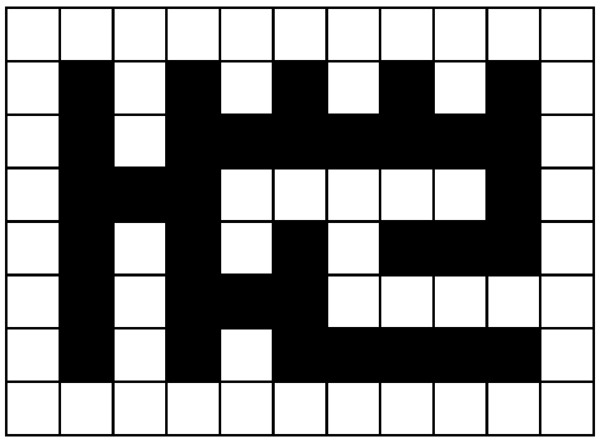
Trous de serrure

Etant donné un rectangle quadrillé à m lignes et n colonnes, on se propose d'étudier les partitions de ce rectangle en deux parts formées de carreaux contigus, par les cotés : l'une blanche, l'autre noire telles que la partie noire, dite ***trou de serrure***, soit un trou connexe sans trou dans la partie blanche et que, dans le rectangle initial, il n'existe pas de carré 2x2 d'un des types :

 ,  ,  ou 

Exemples :





Montrer que

1 - Si m et n sont pairs tous les deux alors il n'existe pas de *trou de serrure*.

2 - Si m ou n est impair alors tous les *trous de serrure* comportent le même nombre de carreaux. Exactement (m-1)(n-1)/2 - 1

Preuve

En fait, un trou de serrure (partie noire) est un arbre de p carreaux juxtaposés. Comme tel son demi-périmètre P vaut $p+1$, indépendamment de sa forme.

De même, le complémentaire (partie blanche) est presque un arbre (disons arbre-anneau simple) de q carreaux juxtaposés. Comme tel son demi-périmètre Q vaut q, indépendamment de sa forme.

Or $Q = P + m + n$ car le périmètre de la partie blanche est le périmètre de la partie noire augmenté du périmètre du rectangle initial.

Ainsi : $Q = q = P + m + n = p + m + n + 1$, avec $p + q = mn$ (nombre total de carreaux).

Donc $2q = mn + m + n + 1 = (m+1)(n+1)$ et $2p = mn - m - n - 1$

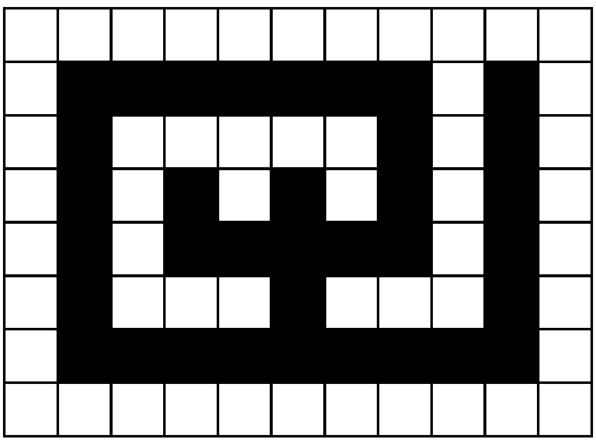
Ce qui explicite les résultats énoncés.

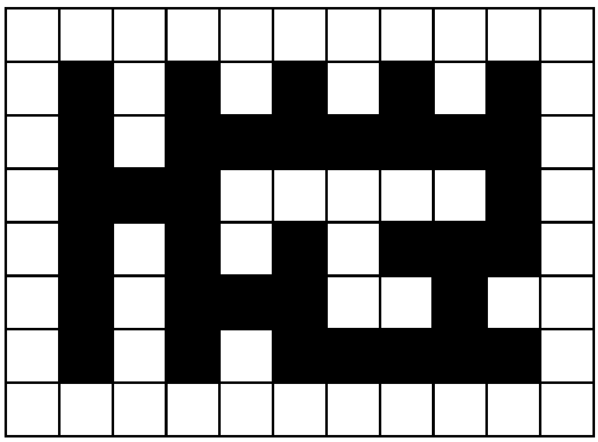
Relances (à la Fraïssé)

I Deux trous de serrure sont dits *voisins* lorsque leur différence symétrique est constitué de deux carreaux ; autrement dit que lorsque on passe de l'un à l'autre en déplaçant un seul carreau noir.

Combien le graphe des voisinages a-t-il de composantes connexes ?

II On peut percer un trou de serrure en acceptant qu'il comporte lui-même un trou connexe sans trou de couleur blanche. On parle alors de trou de serrure percé.





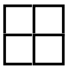
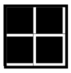
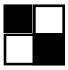
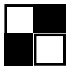
On démontre alors facilement que :

1 - Si m et n sont pairs tous les deux alors il n’existe pas de *trou de serrure percé*.

2 - Si m ou n est impair alors tous les *trous de serrure percés* comportent le même nombre de carreaux. Exactement (m-1)(n-1)/2

III *Que peut-on dire, lorsqu'on s'autorise plusieurs niveaux de percement ?*

Plus généralement, appelons ***trou de serrure généralisé*** une partition d'un quadrillage rectangulaire (m,n), en carreaux noirs ou blancs tel que les carreaux du bord soient blancs et qu'il n'existe pas de carré 2x2 d'un des types :

 ,  ,  ou 

Voici un résultat très simple :

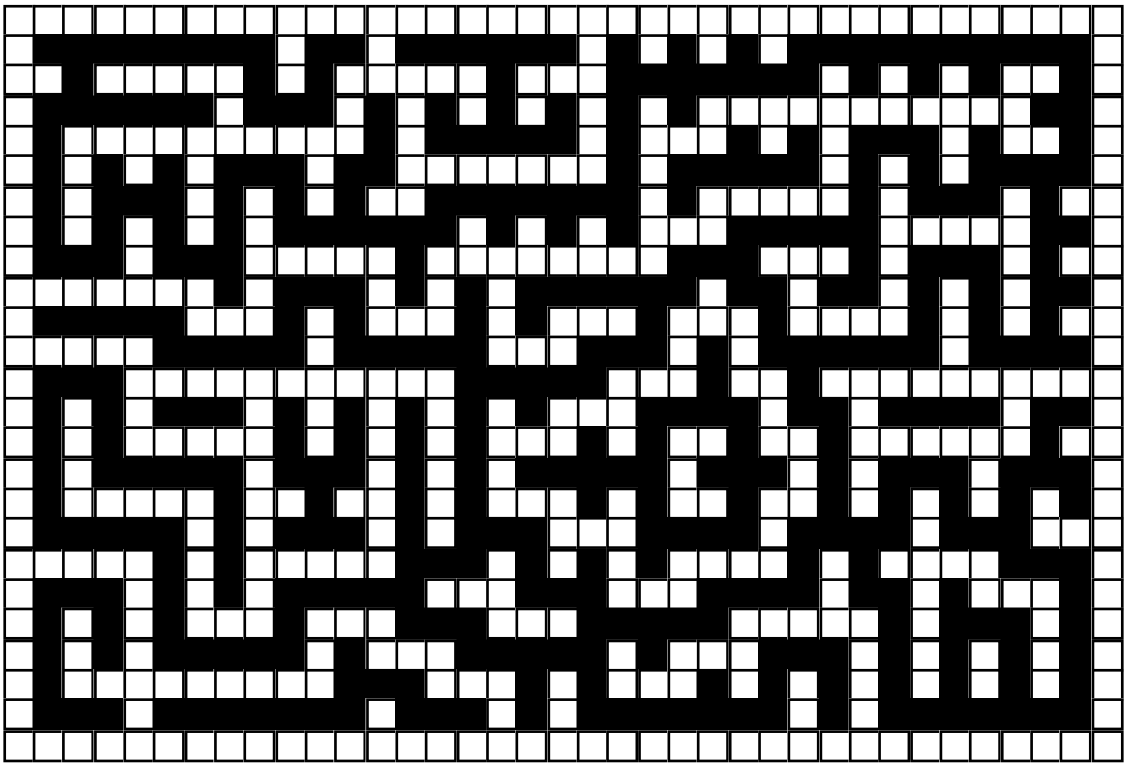
1 - Si m et n sont pairs tous les deux alors il n'existe pas de *trou de serrure généralisé.*

2 - Si m ou n est impair alors, en notant N le nombre de carreaux noirs, T le nombre de trous blancs et C le nombre de composantes connexes noires d'un *trou de serrure généralisé,* on a :

$$N = (m-1)(n-1)/2 + T - C$$

Exemple

Pour le trou de serrure généralisé représenté ci-dessous, on a $m = 37$, $n = 25$, $T = 6$, $C = 9$. Effectivement $N = 429 = 18*24 + 6 - 9$.



Pierre JULLIEN, Août 2002.