BELORDRE ET PROFIL DES RELATIONS

Maurice Pouzet
Laboratoire de de Probabilités, Combinatoire et Statistiques
Université Claude-Bernard,
43, Bd. du 11 novembre 1918,
69622 Villeurbanne, France.
e-mail: pouzet@univ-lyon1.fr

22 Août 2002

Un *belordre* est un ordre -ou un préordre- sur un ensemble tel que toute suite infinie d'éléments de l'ensemble contienne forcément une sous-suite infinie croissante. A partir de l'article fondateur de G.Higman [19] 1952 et de travaux indépendants (voir par exemple [21]), cette notion a diffusé, fournissant un paradigme à des questions d'algèbre, d'algorithmique, de logique et de combinatoire (plongement d'algèbres libres dans des corps [7]; construction de groupes [8]; approche structurelle des bases de Gröbner [6, 5],[36]; calcul asymptotique [40, 39]; terminaison des systèmes de réécriture [11],[22]; preuve de la rationalité de certains langages [12]; problèmes de décision [18]; non-prouvabilité de l'existence de certaines fonctions combinatoires [16],[17],[25]; représentation de graphes dans des surfaces [34]; pour citer quelques exemples). D'importants résultats concernant la structure et les exemples d'ensembles belordonnés jalonnent ce développement (théorèmes de Higman [19], Kruskal [20], de Jongh et Parikh [10] (voir aussi [37],[33]), Robertson et Seymour [34]). Dans le même temps, la notion de *meilleur-ordre*, renforcement de celle de belordre, introduite par C.St.J.A. Nash-Williams [28, 29], permettait d'étendre à des structures infinies les propriétés de belordre de la comparaison des structures finies (eg solution par R.Laver [23, 24] en 1971 des conjectures de R.Fraïssé de 1948 sur les chaînes; extension aux arbres [9] et aux ordres série-parallèles [38]). On trouvera dans [35],[27],[14] un exposé du belordre et du meilleurordre. Dans ce bref exposé, je présenterai l'intervention du belordre dans l'étude asymptotique du profil des relations.

Le *profil* d'une structure relationnelle R est la fonction φ_R qui à chaque entier n associe le nombre de sous-structures de R ayant n éléments, celles-ci étant comptées à l'isomorphie près. Plusieurs fonctions de dénombrement sont des profils. C'est, par exemple, le cas de la fonction θ_G qui compte pour chaque n le nombre $\theta_G(n)$ d'orbites des parties à n éléments d'un ensemble, ce pour l'action d'un groupe G agissant par permutations sur cet ensemble (les groupes pour lesquels cette fonction ne prend que des valeurs finies, dits *oligomorphes* par P.J.Cameron, constituent un sujet d'étude en soi [1] [2, 3, 4]). Comparons les structures relationnelles par abritement (R' *s'abrite* dans R si R' est isomorphe à une restriction de R) et associons à chaque R son *âge*, ensemble $\mathcal{A}(R)$ des R' finies qu'elle abrite, celles-ci étant considérées à l'isomorphie près. Lorsque $\mathcal{A}(R)$ est belordonné par l'abritement, on peut lui associer un ordinal, sa *longueur*, $o(\mathcal{A}(R))$, égale au plus grand type d'ordre des extensions linéaires de $\mathcal{A}(R)$, type d'ordre dont l'existence est assurée par le théorème de de Jongh et Parikh [10]. La fonction longueur est un outil de choix dans l'étude du comportement asymptotique des profils. Ainsi, le profil d'une structure relationnelle infinie R est borné si et seulement si $o(\mathcal{A}(R)) = \omega \cdot q$ ($1 \leq q < \omega$; en fait $q = \max \varphi_R$) ([15] pour les structures relationnelles de signature finie; [31] pour le cas général). De ceci résulte que le profil d'une structure relationnelle infinie R est non-décroissant (Pouzet, 1971 pour les structures relationnelles de signature finie, cf. [13, Exercice 8, p. 113]; 1976 pour le cas général [32]). Ceci s'étend (mais une condition est requise si la signature est infinie, par exemple que $N(R) := \{x \in E : \mathcal{A}(R \restriction_{E\setminus\{x\}}) \neq \mathcal{A}(R)\}$, le *noyau* of R, soit fini) ainsi, la croissance de φ_R est polynômiale de degré k si et seulement si $o(\mathcal{A}(R)) = \omega^{k+1} \cdot q$ ($1 \leq q < \omega$). De ceci s'ensuit que la croissance du profil d'une structure relationnelle infinie et de signature finie est soit polynômiale soit plus grande que tout polynôme (cf. [30]). Si R est un graphe alors, dans ce dernier cas, φ_R est asymptotiquement minoré par toute fonction de la forme $\exp(n^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ avec $\varepsilon > 0$ [26]. Des exemples intéressants de croissance polynômiale viennent des groupes. Soit G un groupe agissant par permutations sur $\{0, \dots, k\}$; soit $Inv(G)$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_k]$ consistant des polynômes en les $k+1$ indéterminées $X_0, \dots, X_k$ qui sont invariants sous l'action de G et soit $Inv_n(G)$ la composante homogène of degré n. Le groupe $G' := G \wr \mathfrak{S}_\omega$, product en couronne de G et $\mathfrak{S}_\omega$, groupe symétrique sur ω, agit sur $\{0, \dots, k\} \times \omega$ et pour tout n, $\theta_{G'}(n) = \dim Inv_n(G)$, la dimension de $Inv_n(G)$ (cf. [1]). La série de *Hilbert*

$$\mathcal{H}(Inv(G), z) := \sum_{n=0}^{\infty} \dim Inv_n(G) z^n$$

est une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{P(z)}{(1-z)(1-z^{n_1})\cdots(1-z^{n_k})}$$

avec $1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_k$ et $P(0) = 1$, par conséquent $\theta_{G'}(n)$ est un quasi-polynôme of degré k, en particulier sa croissance est polynômiale de degré k. Il n'est pas encore entièrement prouvé que ceci vaut pour toutes les structures relationnelles dont le noyau est fini et la croissance du profil est polynômiale. Une autre conjecture très tentante est que le profil d'une structure relationnelle R est majoré par une exponentielle si $\mathcal{A}(R)$ est très belordonné (c'est à dire reste belordonné après adjonction d'un nombre fini de relations unaires).

References

[1] Peter J. Cameron. *Oligomorphic permutation groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[2] Peter J. Cameron. The algebra of an age. In *Model theory of groups and automorphism groups (Blaubeuren, 1995)*, pages 126–133. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[3] Peter J. Cameron. Sequences realized by oligomorphic permutation groups. *J. Integer Seq.*, 3(1):Article 00.1.5, 1 HTML document (electronic), 2000.

[4] Peter J. Cameron. Some counting problems related to permutation groups. *Discrete Math.*, 225(1-3):77–92, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Toronto, ON, 1998).

[5] D. E. Cohen. On the laws of a metabelian variety. *J. Algebra*, 5:267–273, 1967.

[6] Daniel E. Cohen. Closure relations. Buchberger's algorithm, and polynomials in infinitely many variables. In *Computation theory and logic*, pages 78–87. Springer, Berlin, 1987.

[7] P. M. Cohn. *Universal algebra*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, second edition, 1981.

[8] E. Corominas. Application de l'algèbre ordinale aux groupes abéliens de torsion. In *Comptes-Rendus des Journées d'Algèbre Pure et Appliquée (Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1971)*, pages 144–148. Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1971.

[9] E. Corominas. On better quasi-ordering countable trees. *Discrete Math.*, 53:35–53, 1985.

[10] D. H. J. de Jongh and R. Parikh. Well-partial orderings and hierarchies. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A =Indag. Math.*, 39(3):195–207, 1977.

[11] Nachum Dershowitz and Jean-Pierre Jouannaud. Rewrite systems. In *Handbook of theoretical computer science, Vol. B*, pages 243–320. Elsevier, Amsterdam, 1990.

[12] A. Ehrenfeucht, D. Haussler, and G. Rozenberg. On regularity of context-free languages. *Theoret. Comput. Sci.*, 27(3):311–332, 1983.

[13] R. Fraïssé. *Cours de logique mathématique. Tome 1: Relation et formule logique*. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1971.

[14] R. Fraïssé. *Theory of relations*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000.

[15] Roland Fraïssé and Maurice Pouzet. Interprétabilité d'une relation pour une chaîne. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 272:A1624–A1627, 1971.

[16] Harvey Friedman, Neil Robertson, and Paul Seymour. The metamathematics of the graph minor theorem. In *Logic and combinatorics (Arcata, Calif., 1985)*, pages 229–261. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[17] J. H. Gallier. What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal γ_0? A survey of some results in proof theory. *Ann. Pure Appl. Logic*, 53(3):199–260, 1991.

[18] Ju. Š. Gurevič. The problem of reduction for the logic of predicates and operations. *Algebra i Logika*, 8:284–308, 1969.

[19] G. Higman. Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 2:326–336, 1952.

[20] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.

[21] J. B. Kruskal. The theory of well-quasi-ordering : a frequently discovered concept. *J. Com. Th.*, 13:297–305, 1972.

[22] René Lalement. *Computation as logic*. Prentice Hall International, Englewood Cliffs, NJ, 1993. With a foreword by Michel Demazure, Translated from the 1990 French original by John Plaice.

[23] Richard Laver. On Fraïssé's order type conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 93:89–111, 1971.

[24] Richard Laver. An order type decomposition theorem. *Ann. of Math. (2)*, 98:96–119, 1973.

[25] M. Loebl. Unprovable combinatorial statements. *Discrete Math.*, 108(1-3):333–342, 1992.

[26] H. D. Macpherson. Growth rates in infinite graphs and permutation groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 51(2):285–294, 1985.

[27] E. C. Milner. Basic wqo- and bqo-theory. In *Graphs and order (Banff, Alta., 1984)*, pages 487–502. Reidel, Dordrecht, 1985.

[28] C. St. J. A. Nash-Williams. On well-quasi-ordering finite trees. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 59:833–835, 1963.

[29] C. St. J. A. Nash-Williams. On better-quasi-ordering transfinite sequences. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 64:273–290, 1968.

[30] M. Pouzet. *Sur la théorie des relations*. Thèse d'état, Université Claude-Bernard, Lyon 1, 1978.

[31] M. Pouzet. Application de la notion de relation presque-enchaînable au dénombrement des restrictions finies d'une relation. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 27(4):289–332, 1981.

[32] Maurice Pouzet. Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. *Math. Z.*, 150(2):117–134, 1976.

[33] M. Rathjen and A. Weiermann. Proof-theoretic investigations on Kruskal's theorem. *Ann. Pure Appl. Logic*, 60(1):49–88, 1993.

[34] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors—a survey. In *Surveys in combinatorics 1985 (Glasgow, 1985)*, pages 153–171. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[35] Joseph G. Rosenstein. *Linear orderings*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1982.

[36] Gerhard Schiffels. Orderings and algorithms in commutative algebra. In *Proceedings of the UMA Symposium (Porto-Novo, 1993)*, volume 2, pages 79–101, 1993.

[37] D. Schmidt. *Well-partial orderings and their maximal order types*. Habilitation, University of Heidelberg, Heidelberg, 1978.

[38] Stéphan Thomassé. On better-quasi-ordering countable series-parallel orders. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(6):2491–2505, 2000.

[39] Joris van der Hoeven. *Operators on generalized power series*. preprint, Université d'Orsay, Paris, fev. 2002.

[40] Joris van der Hoeven. *Asymptotique automatique*. Université Paris VII, Paris, 1997. Thèse, Université Paris VII, Paris, 1997, With an introduction and a conclusion in French.