Renforcer la conjecture de Murty-Simon sur les graphes critiques de diamètre 2

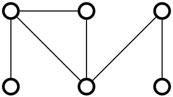
Antoine Dailly[1], Florent Foucaud[2], Adriana Hansberg[3]

[1] G-SCOP, Grenoble
[2] LIMOS, Clermont-Ferrand
[3] Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla

Distance, diamètre

Distance

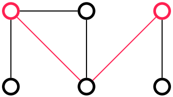
La distance entre deux sommets est le nombre d'arêtes sur le plus court chemin entre eux.



Distance, diamètre

Distance

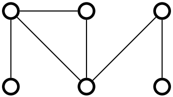
La distance entre deux sommets est le nombre d'arêtes sur le plus court chemin entre eux.



Distance, diamètre

Distance

La distance entre deux sommets est le nombre d'arêtes sur le plus court chemin entre eux.



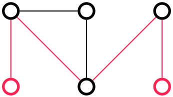
Diamètre

Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.

Distance, diamètre

Distance

La distance entre deux sommets est le nombre d'arêtes sur le plus court chemin entre eux.



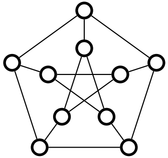
Diamètre

Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.

Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

Définition

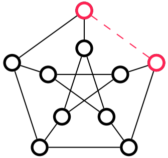
Un graphe est D2C s'il a diamètre 2



Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

Définition

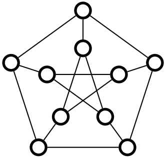
Un graphe est D2C s'il a diamètre 2 et si supprimer toute arête augmente son diamètre.

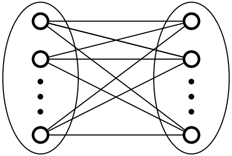


Graphes diamètre-2-critiques (D2C)

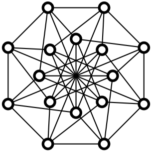
Définition

Un graphe est D2C s'il a diamètre 2 et si supprimer toute arête augmente son diamètre.

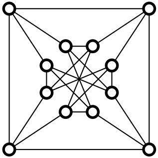




Graphes bipartis complets



Graphe de Clebsch

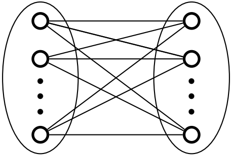


Graphe de Chvàtal

Combien d'arêtes dans un graphe D2C ?

Combien d'arêtes dans un graphe D2C ?

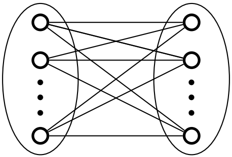
Exemple : $K_{k,\ell}$



$\Rightarrow$ $k\ell$ arêtes $\Rightarrow$ max $\sim \frac{n^2}{4}$

Combien d'arêtes dans un graphe D2C ?

Exemple : $K_{k,\ell}$



$\Rightarrow k\ell$ arêtes $\Rightarrow$ max $\sim \frac{n^2}{4}$

Exemple : graphes D2C sans triangles

Au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes ; égalité $\Leftrightarrow G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ (Mantel, 1907).

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Vérifiée pour :

- $n \leq 24$, $n = 26$ (Fan, 1987)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Vérifiée pour :

- $n \leq 24$, $n = 26$ (Fan, 1987)
- $n \geq \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\}{\scriptstyle \text{taille } 10^{14}}$ (Füredi, 1992)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Vérifiée pour :

- $n \leq 24$, $n = 26$ (Fan, 1987)
- $n \geq \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}_{\text{taille } 10^{14}}$ (Füredi, 1992)
- $\Delta \geq 0.6756n$ (Jabalameli *et al.*, 2016)

Conjecture de Murty-Simon

Conjecture (Murty, Simon, Ore, Plesník, 1970s)

Si G est D2C, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arêtes, avec égalité ssi $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

- $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ (Plesník, 1975)
- $m < \frac{1+\sqrt{5}}{12} n^2 < 0.27n^2$ (Cacceta et Häggkvist, 1979)
- $m < 0.2532n^2$ (Fan, 1987)

Vérifiée pour :

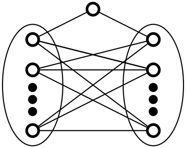
- $n \leq 24$, $n = 26$ (Fan, 1987)
- $n \geq \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\}_{\text{taille } 10^{14}}$ (Füredi, 1992)
- $\Delta \geq 0.6756n$ (Jabalameli *et al.*, 2016)
- Avec une arête dominante (Hanson et Wang, 2003, Haynes *et al.*, 2011, Wang 2012)

Renforcer la conjecture ?

Renforcer la conjecture ?

Affirmation (Füredi, 1992)

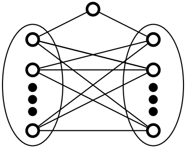
Si G est D2C non-biparti, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 \approx \left\lfloor \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right\rfloor$, avec égalité ssi G est obtenu en subdivisant une arête de $K_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$.

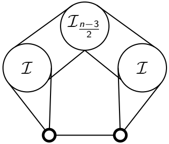


Renforcer la conjecture ?

Affirmation (Füredi, 1992)

Si G est D2C non-biparti, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 \approx \left\lfloor \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right\rfloor$, avec égalité ssi G est obtenu en subdivisant une arête de $K_{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil}$.





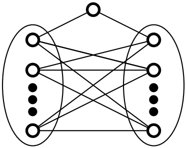
Théorème (Balbuena *et al.*, 2015)

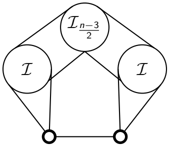
Si G est D2C non-biparti sans triangles, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ arêtes, avec égalité ssi G est une inflation de C_5.

Renforcer la conjecture ?

Affirmation (Füredi, 1992)

Si G est D2C non-biparti, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 \approx \left\lfloor \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right\rfloor$, ~~avec égalité ssi G est obtenu en subdivisant une arête de $K_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$.~~





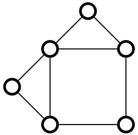
Théorème (Balbuena *et al.*, 2015)

Si G est D2C non-biparti sans triangles, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ arêtes, avec égalité ssi G est une inflation de C_5.

Renforcer la conjecture

Conjecture : renforcement linéaire (Balbuena *et al.*, 2015)

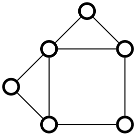
Si G est D2C non-biparti et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ arêtes. Si $n \geq 10$, il y a égalité ssi G est une inflation de C_5.

$H_5 =$ 

Renforcer la conjecture

Conjecture : renforcement linéaire (Balbuena *et al.*, 2015)

Si G est D2C non-biparti et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1$ arêtes. Si $n \geq 10$, il y a égalité ssi G est une inflation de C_5.

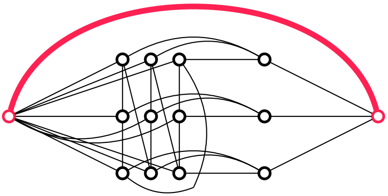
$H_5 =$ 

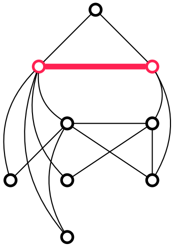
$\rightarrow$ Difficile ! Renforcement constant ?

Notre résultat principal

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.





Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

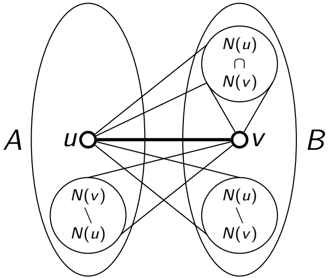
Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.



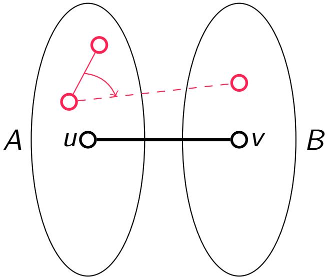
Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.
2. Associer à chaque arête dans A et B une non-arête entre eux.



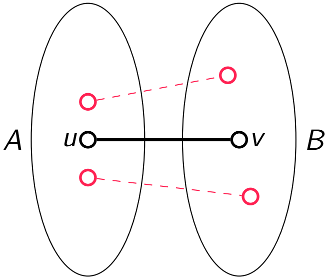
Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.
2. Associer à chaque arête dans A et B une non-arête entre eux.
3. Trouver deux non-arêtes sans antécédent entre A et B.



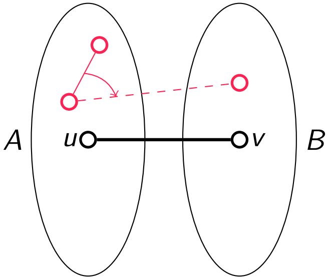
Principe de la preuve

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si G est D2C non-biparti avec une arête dominante et $G \neq H_5$, alors il a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2$ arêtes.

Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.
2. Associer à chaque arête dans A et B une non-arête entre eux.
3. Trouver deux non-arêtes sans antécédent entre A et B.



Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

Définition

Une arête e est critique pour les sommets x et y si

Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

Définition

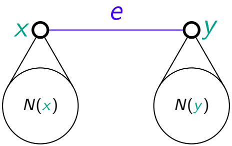
Une arête e est critique pour les sommets x et y si e fait partie du seul chemin de longueur 1 ou 2 entre x et y.

Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

Définition

Une arête e est critique pour les sommets x et y si e fait partie du seul chemin de longueur 1 ou 2 entre x et y.

$\rightarrow$ Soit $e = xy$ et $N(x) \cap N(y) = \emptyset$;

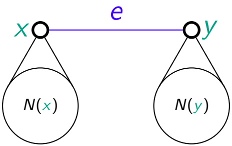


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

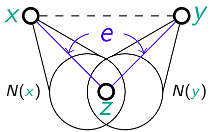
Définition

Une arête e est critique pour les sommets x et y si e fait partie du seul chemin de longueur 1 ou 2 entre x et y.

$\rightarrow$ Soit $e = xy$ et $N(x) \cap N(y) = \emptyset$;



$\rightarrow$ Soit $xy \notin E$, $N(x) \cap N(y) = \{z\}$ et $e \in \{xz, yz\}$.

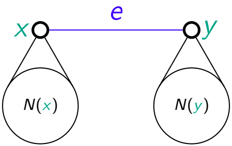


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

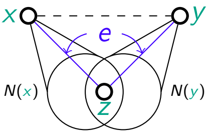
Définition

Une arête e est critique pour les sommets x et y si e fait partie du seul chemin de longueur 1 ou 2 entre x et y.

$\rightarrow$ Soit $e = xy$ et $N(x) \cap N(y) = \emptyset$;



$\rightarrow$ Soit $xy \notin E$, $N(x) \cap N(y) = \{z\}$ et $e \in \{xz, yz\}$.

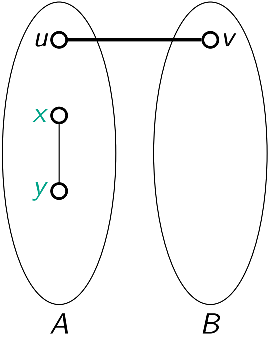


$\Rightarrow$ Toute arête est critique pour une paire de sommets

Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

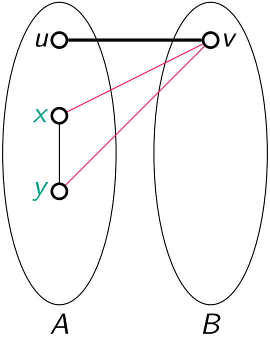


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.

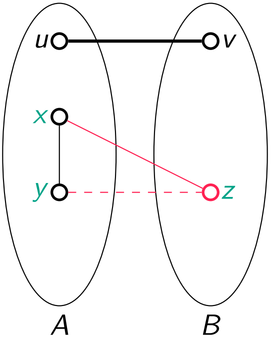


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.
- Critique pour y et z avec $z \in B \cap N(x)$

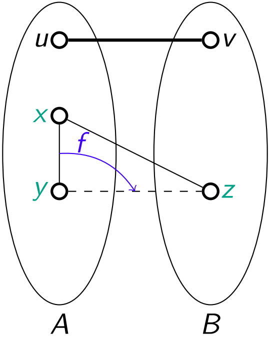


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.
- Critique pour y et z avec $z \in B \cap N(x)$: soit $f(xy) = \overline{yz}$.

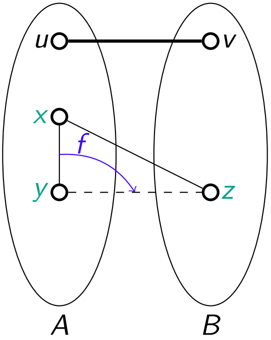


Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.
- Critique pour y et z avec $z \in B \cap N(x)$: soit $f(xy) = \overline{yz}$.



Lemme

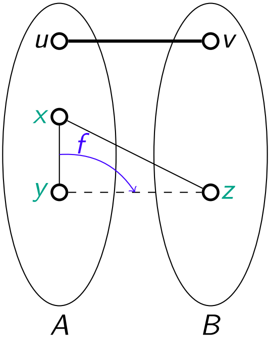
f est injective.

Associer les arêtes internes aux non-arêtes externes

La fonction f

Soit xy une arête dans A.

- Pas critique pour x et y car ils ont v comme voisin commun.
- Critique pour y et z avec $z \in B \cap N(x)$: soit $f(xy) = \overline{yz}$.



Lemme

f est injective. $\Rightarrow$ Borne de Murty-Simon démontrée

Des non-arêtes sans antécédent ?

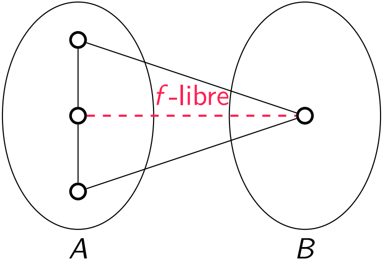
Définition

Une non-arête entre A et B sans antécédent par f est f-libre.

Des non-arêtes sans antécédent ?

Définition

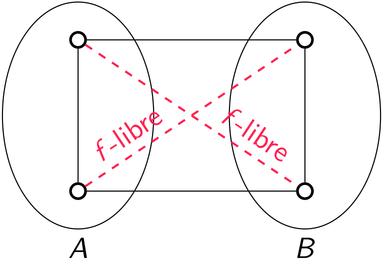
Une non-arête entre A et B sans antécédent par f est f-libre.



Des non-arêtes sans antécédent ?

Définition

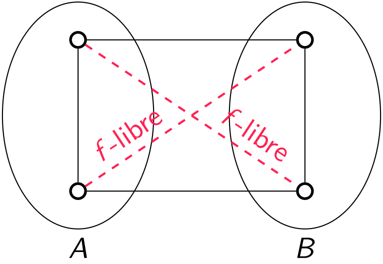
Une non-arête entre A et B sans antécédent par f est f-libre.



Des non-arêtes sans antécédent ?

Définition

Une non-arête entre A et B sans antécédent par f est f-libre.



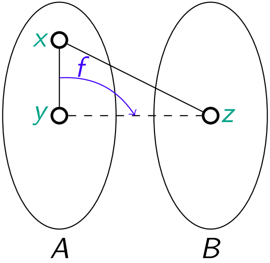
Plan

1. Partitionner les sommets en deux ensembles A et B.
2. Associer à chaque arête dans A et B une non-arête entre eux.
3. Trouver deux non-arêtes sans antécédent entre A et B.

Définir une orientation des arêtes internes

La f-orientation

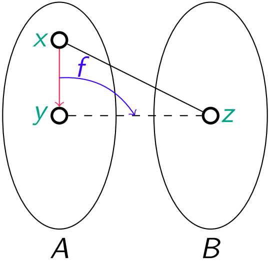
Si $f(xy) = \overline{yz}$,



Définir une orientation des arêtes internes

La f-orientation

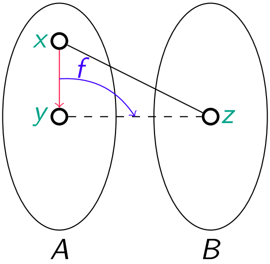
Si $f(xy) = \overline{yz}$, on oriente xy de x à y.



Définir une orientation des arêtes internes

La f-orientation

Si $f(xy) = \overline{yz}$, on oriente xy de x à y.



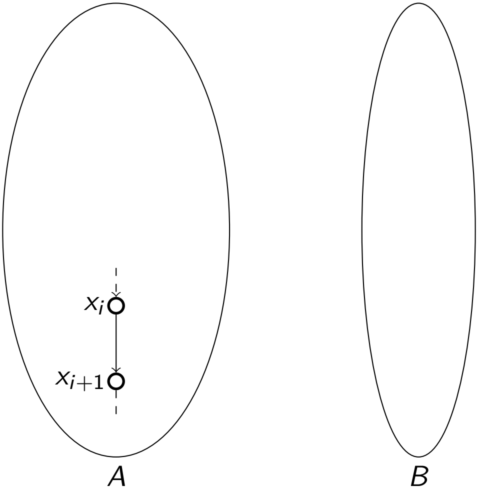
Prochaine étape

Trouver 2 non-arêtes libres en utilisant les propriétés de l'orientation.

Un exemple de propriété de l'orientation

Lemme

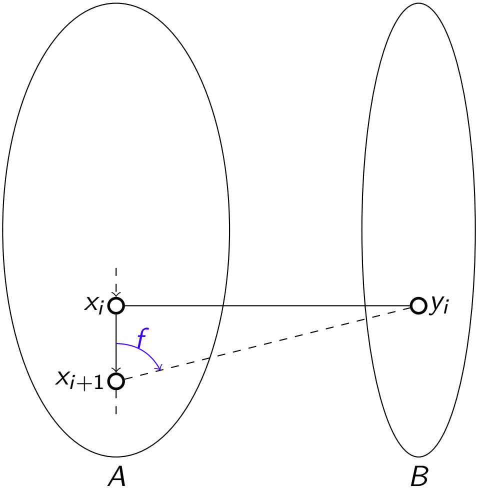
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Un exemple de propriété de l'orientation

Lemme

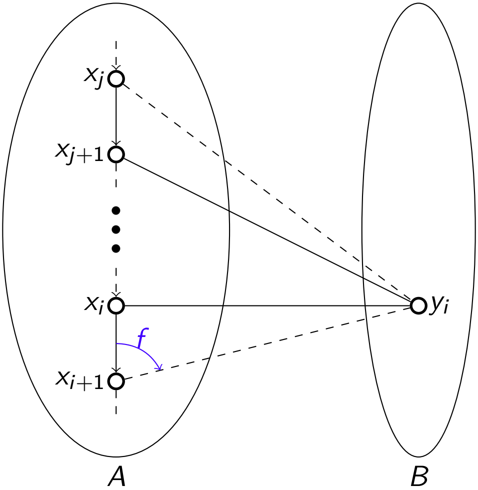
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Un exemple de propriété de l'orientation

Lemme

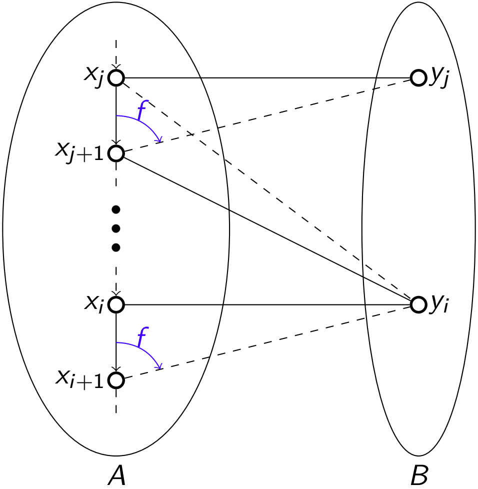
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Un exemple de propriété de l'orientation

Lemme

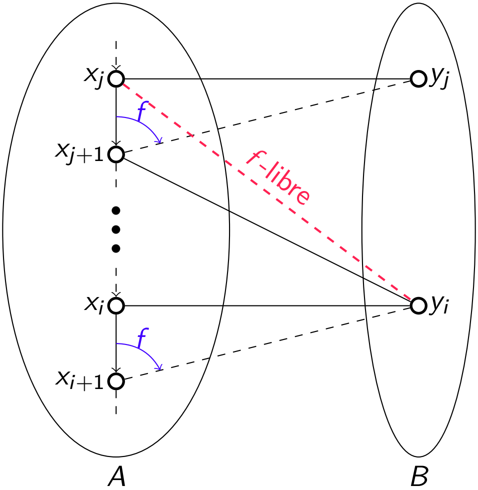
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Un exemple de propriété de l'orientation

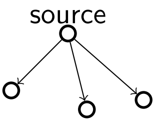
Lemme

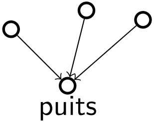
Pour chaque sommet d'un cycle orienté, au moins 1 non-arête libre.



Fin de la preuve

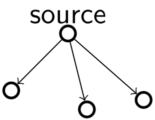
Pas de cycle orienté
$\Rightarrow$ Au moins une
source et un puits

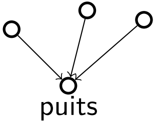




Fin de la preuve

Pas de cycle orienté
$\Rightarrow$ Au moins une
source et un puits



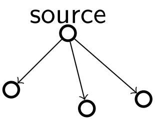


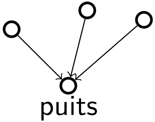
Lemme

Au moins 1 non-arête libre dans le voisinage d'une source ou d'un puits.

Fin de la preuve

Pas de cycle orienté
$\Rightarrow$ Au moins une
source et un puits





Lemme

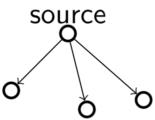
Au moins 1 non-arête libre dans le voisinage d'une source ou d'un puits.

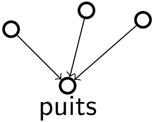
Remarque

$\Rightarrow$ Prouve Murty-Simon pour cette famille !

Fin de la preuve

Pas de cycle orienté
$\Rightarrow$ Au moins une
source et un puits





Lemme

Au moins 1 non-arête libre dans le voisinage d'une source ou d'un puits.

Remarque

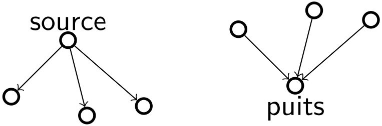
$\Rightarrow$ Prouve Murty-Simon pour cette famille !

Fin de la preuve

- Au moins une source et un puits à distance au moins 3 dans une composante $\Rightarrow$ Preuve terminée

Fin de la preuve

Pas de cycle orienté
$\Rightarrow$ Au moins une
source et un puits



Lemme

Au moins 1 non-arête libre dans le voisinage d'une source ou d'un puits.

Remarque

$\Rightarrow$ Prouve Murty-Simon pour cette famille !

Fin de la preuve

- Au moins une source et un puits à distance au moins 3 dans une composante $\Rightarrow$ Preuve terminée
- Sinon $\Rightarrow$ Raffinement des propriétés pour terminer la preuve

Des résultats plus forts sous conditions

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si uv n'est critique que pour u et v, alors G a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2c$ arêtes ($c =$ nombre de composantes de diamètre ≥ 3 dans $N(u)$ ou dans $N(v)$).

Théorème (D., Foucaud, Hansberg, 2018+)

Si uv n'est critique que pour u et v, alors G a au plus $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - \sum_{C \in \mathcal{C}} |C| - |\mathcal{S}|$ arêtes ($\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{S}$) $=$ cycles (resp. triangles transitifs ou voisinages disjoints de sources/puits) induits par la f-orientation dans $N(u)$ ou dans $N(v)$).

Au final

Conclusion

- Amélioration de la borne de Murty-Simon
- Méthode de la f-orientation potentiellement réutilisable

Au final

Conclusion

- Amélioration de la borne de Murty-Simon
- Méthode de la f-orientation potentiellement réutilisable

Perspectives

- Améliorer la borne pour cette famille (étude structurelle)
- Appliquer la méthode à d'autres familles de graphes D2C

Au final

Conclusion

- Amélioration de la borne de Murty-Simon
- Méthode de la f-orientation potentiellement réutilisable

Perspectives

- Améliorer la borne pour cette famille (étude structurelle)
- Appliquer la méthode à d'autres familles de graphes D2C