# Coloration du graphe médial d'un graphe plan biparti

François Dross, Borut Lužar, Mária Maceková, Roman Soták

Université Côte d'Azur, I3S, CNRS, Inria

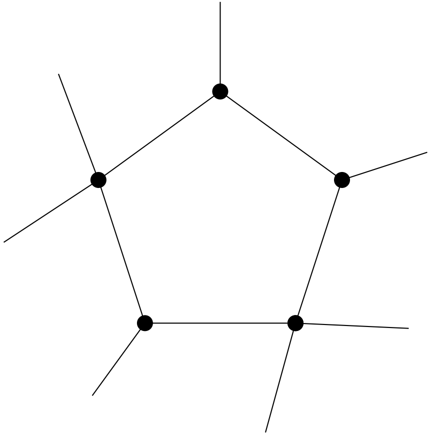
15 novembre 2018

# Coloration faciale des arêtes

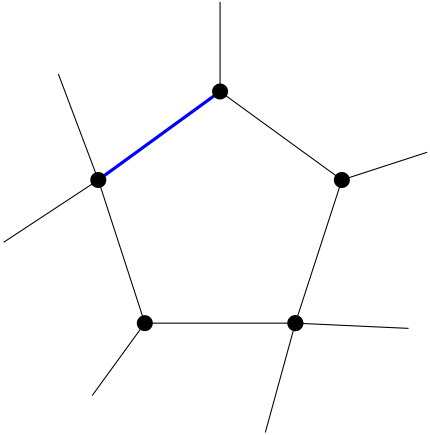
Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.

# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.

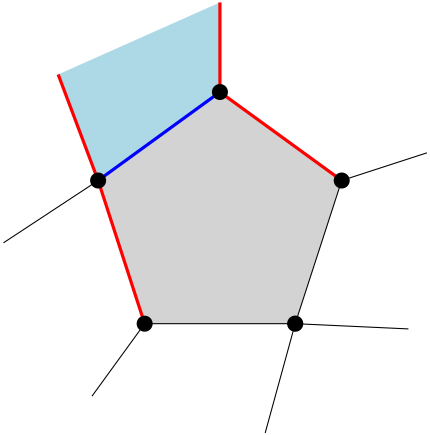


Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



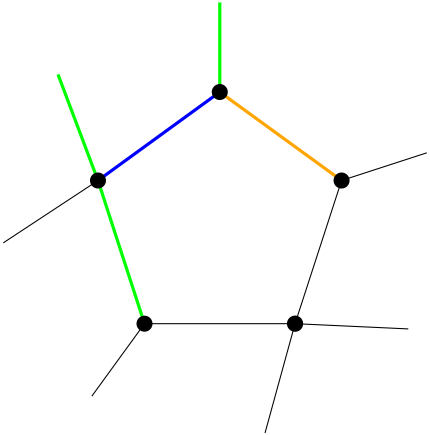
# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



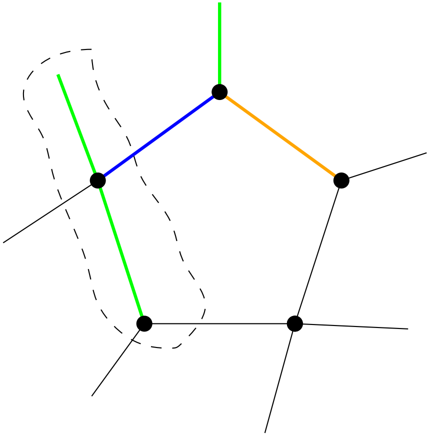
# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



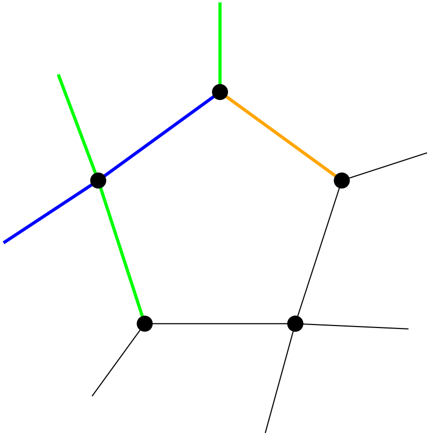
# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



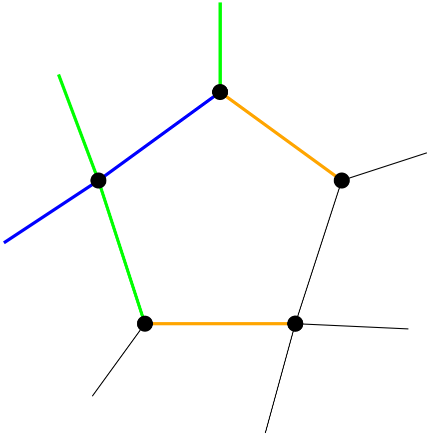
# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



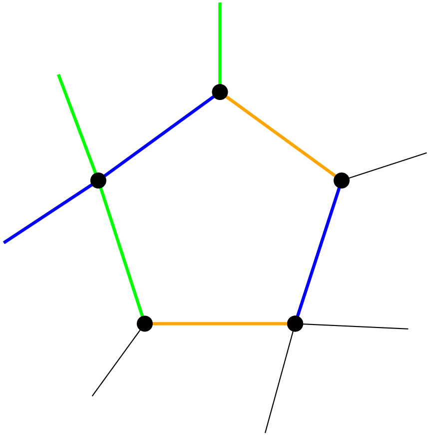
# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



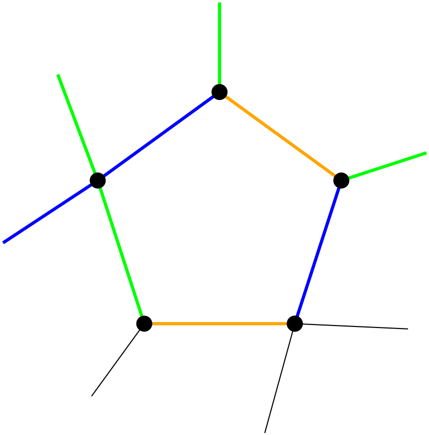
# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



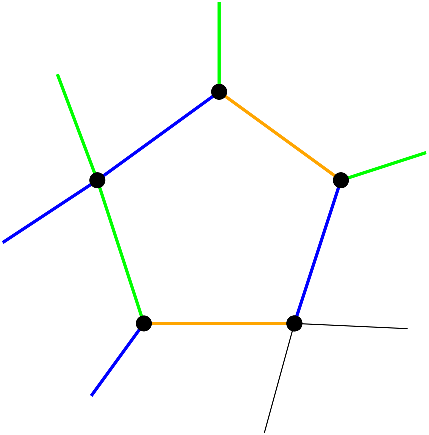
# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



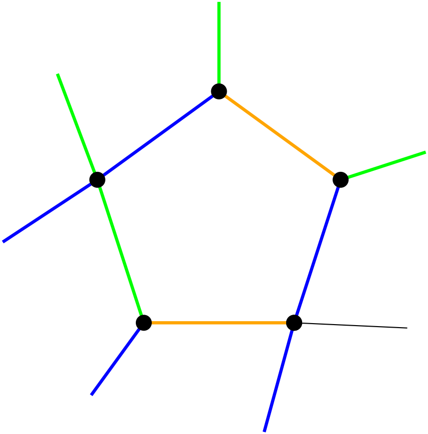
# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



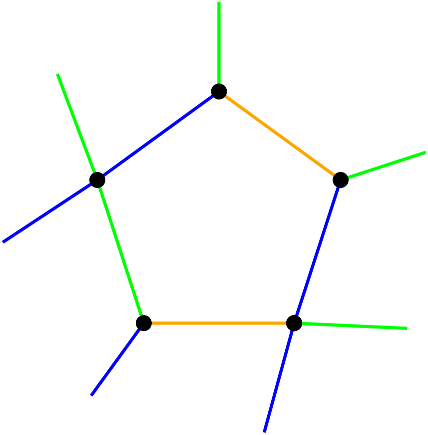
# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



# Coloration faciale des arêtes

Une coloration faciale des arêtes d'un graphe plan est une coloration des arêtes du graphe tel que deux arêtes adjacentes dans un chemin facial soient de couleurs différentes.



# Le graphe médial d'un graphe plan

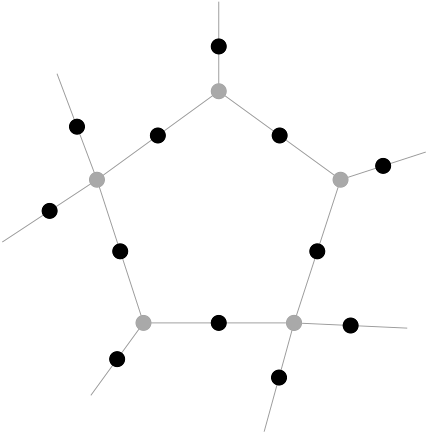
Le graphe médial $M(G)$ d'un graphe plan $G$ :

- $V(M(G)) = E(G)$
- Deux sommets sont adjacents si leurs arêtes dans $G$ sont adjacentes dans un chemin facial.

# Le graphe médial d'un graphe plan

Le graphe médial $M(G)$ d'un graphe plan $G$ :

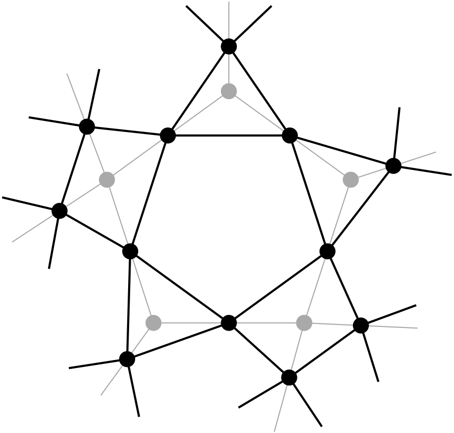
- $V(M(G)) = E(G)$
- Deux sommets sont adjacents si leurs arêtes dans $G$ sont adjacentes dans un chemin facial.



# Le graphe médial d'un graphe plan

Le graphe médial $M(G)$ d'un graphe plan $G$ :

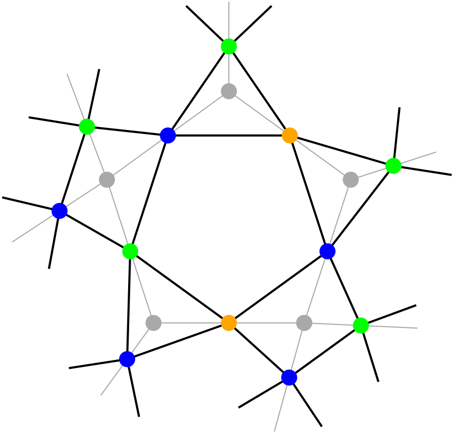
- $V(M(G)) = E(G)$
- Deux sommets sont adjacents si leurs arêtes dans $G$ sont adjacentes dans un chemin facial.



# Le graphe médial d'un graphe plan

Le graphe médial $M(G)$ d'un graphe plan $G$ :

- $V(M(G)) = E(G)$
- Deux sommets sont adjacents si leurs arêtes dans $G$ sont adjacentes dans un chemin facial.



**Problème (Czap, Jendrol' et Voigt, 2018)**

*Existe-t-il un graphe plan biparti dont le graphe médial a un nombre chromatique égal à 4 ?*

# Notre résultat

**Problème (Czap, Jendrol' et Voigt, 2018)**

*Existe-t-il un graphe plan biparti dont le graphe médial a un nombre chromatique égal à 4 ?*

**Theorème (D., Lužar, Maceková et Soták, 2018$^+$)**

*Tout graphe sans boucles obtenu comme un sous-graphe du graphe médial d'un graphe plan biparti est 3-choisissable.*

# Notre résultat

**Problème (Czap, Jendrol' et Voigt, 2018)**

*Existe-t-il un graphe plan biparti dont le graphe médial a un nombre chromatique égal à 4 ?*

**Theorème (D., Lužar, Maceková et Soták, $2018^{+}$)**

*Tout graphe sans boucles obtenu comme un sous-graphe du graphe médial d'un graphe plan biparti est 3-choisissable.*

- Réponse au problème également dans le cadre de la coloration par listes.

# Schéma de preuve – 1

- Structure de notre graphe :
  - graphe médial $G$ d'un graphe plan biparti $B$ avec $\delta(B) \geq 2$ ;

# Schéma de preuve – 1

- Structure de notre graphe :
  - graphe médial $G$ d'un graphe plan biparti $B$ avec $\delta(B) \geq 2$ ;
  - $\Rightarrow$ deux types de faces :

## Schéma de preuve – 1

- Structure de notre graphe :
  - graphe médial $G$ d'un graphe plan biparti $B$ avec $\delta(B) \geq 2$ ;
  - $\Rightarrow$ deux types de faces :
    - faces correspondant aux sommets de $B$ (faces noires) ;
    - faces correspondant aux faces de $B$ (faces blanches) ;

## Schéma de preuve – 1

- Structure de notre graphe :
  - graphe médial $G$ d'un graphe plan biparti $B$ avec $\delta(B) \geq 2$ ;
  - $\Rightarrow$ deux types de faces :
    - faces correspondant aux sommets de $B$ (faces noires) ;
    - faces correspondant aux faces de $B$ (faces blanches) ;
  - Les faces blanches sont de longueur paire ;

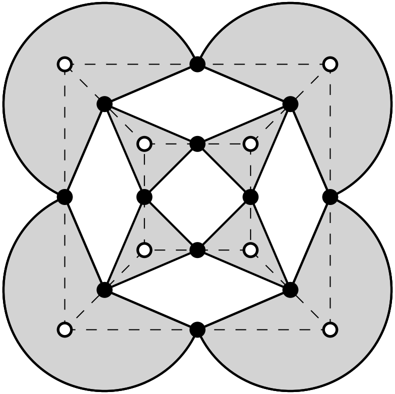
# Schéma de preuve – 1

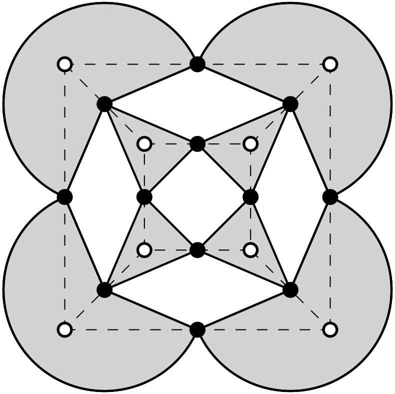
- Structure de notre graphe :
  - graphe médial $G$ d'un graphe plan biparti $B$ avec $\delta(B) \geq 2$ ;
  - $\Rightarrow$ deux types de faces :
    - faces correspondant aux sommets de $B$ (faces noires) ;
    - faces correspondant aux faces de $B$ (faces blanches) ;
  - Les faces blanches sont de longueur paire ;
  - Deux faces blanches (noires) ne sont jamais adjacentes ;

# Schéma de preuve – 1

- Structure de notre graphe :
  - graphe médial $G$ d'un graphe plan biparti $B$ avec $\delta(B) \geq 2$ ;
  - $\Rightarrow$ deux types de faces :
    - faces correspondant aux sommets de $B$ (faces noires) ;
    - faces correspondant aux faces de $B$ (faces blanches) ;
  - Les faces blanches sont de longueur paire ;
  - Deux faces blanches (noires) ne sont jamais adjacentes ;
  - $\Rightarrow$ Toute arête de $G$ est incidente à une face noire et à une face blanche.

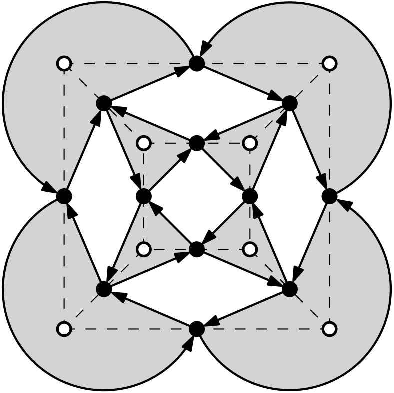
# Schéma de preuve – 2





- Orienter les arêtes telles que tout arc a sa face noire sur la gauche et sa face blanche sur la droite.

# Schéma de preuve – 2



- Orienter les arêtes telles que tout arc a sa face noire sur la gauche et sa face blanche sur la droite.

# Schéma de preuve – 3

- Tout sommet a exactement deux arcs entrants et deux arcs sortants ;

# Schéma de preuve – 3

- Tout sommet a exactement deux arcs entrants et deux arcs sortants ;
- On fait appel au...

## Schéma de preuve – 3

- Tout sommet a exactement deux arcs entrants et deux arcs sortants ;
- On fait appel au…

**Theorème (Alon & Tarsi)**

*Soit $D$ un graphe dirigé, et $L$ un list-assignment tel que $|L(v)| \geq d^+_D(v) + 1$ pour tout $v \in V(D)$. Si $E^e(D) \neq E^o(D)$, alors $D$ est $L$-choisissable.*

- Tout sommet a exactement deux arcs entrants et deux arcs sortants ;
- On fait appel au...

**Theorème (Alon & Tarsi)**

*Soit $D$ un graphe dirigé, et $L$ un list-assignment tel que $|L(v)| \geq d_D^+(v) + 1$ pour tout $v \in V(D)$. Si $E^e(D) \neq E^o(D)$, alors $D$ est $L$-choisissable.*

- Il suffit de montrer que le nombre de sous-graphes eulériens couvrants pairs est différent du nombre de sous-graphes eulériens couvrants impairs dans $G$.

## Schéma de preuve – 4

- Définissons la frontière, l'intérieur et l'extérieur d'un graphe plan eulérien $H$ comme suit :
  - Colorer les faces de $H$ proprement avec deux couleurs (possible puisque le dual de $H$ est biparti) ;

## Schéma de preuve – 4

- Définissons la frontière, l'intérieur et l'extérieur d'un graphe plan eulérien $H$ comme suit :
  - Colorer les faces de $H$ proprement avec deux couleurs (possible puisque le dual de $H$ est biparti) ;
  - Disons que la face extérieure est colorée en vert et que l'autre couleur est bleu ;

# Schéma de preuve – 4

- Définissons la frontière, l'intérieur et l'extérieur d'un graphe plan eulérien $H$ comme suit :
  - Colorer les faces de $H$ proprement avec deux couleurs (possible puisque le dual de $H$ est biparti) ;
  - Disons que la face extérieure est colorée en vert et que l'autre couleur est bleu ;
  - La frontière $\partial(H)$ de $H$ est l'ensemble des arêtes de $H$ ;

# Schéma de preuve – 4

- Définissons la frontière, l'intérieur et l'extérieur d'un graphe plan eulérien $H$ comme suit :
  - Colorer les faces de $H$ proprement avec deux couleurs (possible puisque le dual de $H$ est biparti) ;
  - Disons que la face extérieure est colorée en vert et que l'autre couleur est bleu ;
  - La frontière $\partial(H)$ de $H$ est l'ensemble des arêtes de $H$ ;
  - L'intérieur $\mathrm{int}(H)$ de $H$ est l'ensemble des arêtes de $G$ qui sont à l'intérieur des faces bleues de $H$ ;

# Schéma de preuve – 4

- Définissons la frontière, l'intérieur et l'extérieur d'un graphe plan eulérien $H$ comme suit :
  - Colorer les faces de $H$ proprement avec deux couleurs (possible puisque le dual de $H$ est biparti) ;
  - Disons que la face extérieure est colorée en vert et que l'autre couleur est bleu ;
  - La frontière $\partial(H)$ de $H$ est l'ensemble des arêtes de $H$ ;
  - L'intérieur $\mathrm{int}(H)$ de $H$ est l'ensemble des arêtes de $G$ qui sont à l'intérieur des faces bleues de $H$ ;
  - L'extérieur $\mathrm{ext}(H)$ de $H$ est l'ensemble des arêtes de $G$ qui sont à l'intérieur des faces vertes de $H$ ;

# Schéma de preuve – 4

- Définissons la frontière, l'intérieur et l'extérieur d'un graphe plan eulérien $H$ comme suit :
  - Colorer les faces de $H$ proprement avec deux couleurs (possible puisque le dual de $H$ est biparti) ;
  - Disons que la face extérieure est colorée en vert et que l'autre couleur est bleu ;
  - La frontière $\partial(H)$ de $H$ est l'ensemble des arêtes de $H$ ;
  - L'intérieur $\mathrm{int}(H)$ de $H$ est l'ensemble des arêtes de $G$ qui sont à l'intérieur des faces bleues de $H$ ;
  - L'extérieur $\mathrm{ext}(H)$ de $H$ est l'ensemble des arêtes de $G$ qui sont à l'intérieur des faces vertes de $H$ ;
- Pour un sous-graphe $X$ de $G$, on définit :
  $\partial_X(H) = \partial(H) \cap E(X)$, $\mathrm{int}_X(H) = \mathrm{int}(H) \cap E(X)$,
  $\mathrm{ext}_X(H) = \mathrm{ext}(H) \cap E(X)$.

# Schéma de preuve – 5

## Observation

*Soient $D_1$ et $D_2$ deux cycles dirigés dans $G$ tels que $\partial(D_2) \cap \mathrm{int}(D_1) \neq \emptyset$ et $\partial(D_2) \cap \mathrm{ext}(D_1) \neq \emptyset$. Alors $\partial(D_1) \cap \partial(D_2) \neq \emptyset$.*

# Schéma de preuve – 5

**Observation**

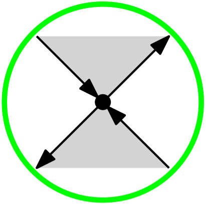
*Soient $D_1$ et $D_2$ deux cycles dirigés dans $G$ tels que $\partial(D_2) \cap \mathrm{int}(D_1) \neq \emptyset$ et $\partial(D_2) \cap \mathrm{ext}(D_1) \neq \emptyset$. Alors $\partial(D_1) \cap \partial(D_2) \neq \emptyset$.*

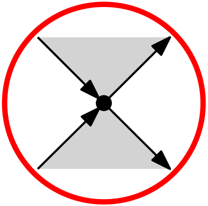
- C'est du au choix de l'orientation : deux arêtes consécutives dans un cycle dirigé sont consécutive dans un chemin facial (pas de croisement).

## Observation

*Soient $D_1$ et $D_2$ deux cycles dirigés dans $G$ tels que $\partial(D_2) \cap \mathrm{int}(D_1) \neq \emptyset$ et $\partial(D_2) \cap \mathrm{ext}(D_1) \neq \emptyset$. Alors $\partial(D_1) \cap \partial(D_2) \neq \emptyset$.*

- C'est du au choix de l'orientation : deux arêtes consécutives dans un cycle dirigé sont consécutive dans un chemin facial (pas de croisement).


possible


not possible

## Schéma de preuve – 6

- Prochain objectif : Exhiber une injection depuis les sous-graphes eulériens couvrants impairs vers les sous-graphes eulériens couvrants pairs ;

# Schéma de preuve – 6

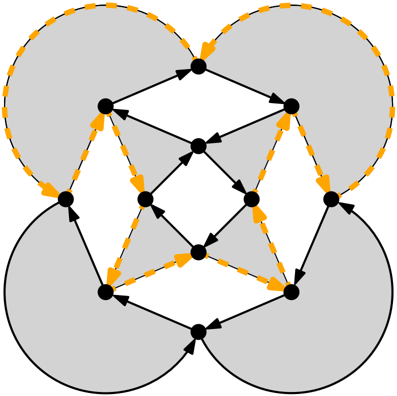
- Prochain objectif : Exhiber une injection depuis les sous-graphes eulériens couvrants impairs vers les sous-graphes eulériens couvrants pairs ;
- Pour tout cycle dirigé $C$, les arêtes de $C$ sont adjacents à des faces toutes blanches ou toutes noires à l'intérieur de $C$ ;

# Schéma de preuve – 6

- Prochain objectif : Exhiber une injection depuis les sous-graphes eulériens couvrants impairs vers les sous-graphes eulériens couvrants pairs ;
- Pour tout cycle dirigé $C$, les arêtes de $C$ sont adjacents à des faces toutes blanches ou toutes noires à l'intérieur de $C$ ;
- $\Rightarrow$ Deux types de cycles dans $G$ :
  - cycles noirs ;
  - cycles blancs.

# Schéma de preuve – 6

- $\Rightarrow$ Deux types de cycles dans $G$ :
  - cycles noirs ;
  - cycles blancs.



# Schéma de preuve – 7

- Pour un cycle $D$, le $D$-complément d'un sous-graphe eulérien couvrant $X$ de $G$ est le sous-graphe couvrant $\overline{X}^D$ dont les arêtes sont

$$E(\overline{X}^D) = \mathrm{ext}_X(D) \cup \mathrm{int}_{\overline{X}}(D) \cup \partial_{\overline{X}}(D);$$

## Schéma de preuve – 7

- Pour un cycle $D$, le $D$-complément d'un sous-graphe eulérien couvrant $X$ de $G$ est le sous-graphe couvrant $\overline{X}^D$ dont les arêtes sont

$$E(\overline{X}^D) = \mathrm{ext}_X(D) \cup \mathrm{int}_{\overline{X}}(D) \cup \partial_{\overline{X}}(D);$$

- $\overline{X}^D$ est également eulérien.

## Schéma de preuve – 7

- Pour un cycle $D$, le $D$-complément d'un sous-graphe eulérien couvrant $X$ de $G$ est le sous-graphe couvrant $\overline{X}^D$ dont les arêtes sont

$$E(\overline{X}^D) = \mathrm{ext}_X(D) \cup \mathrm{int}_{\overline{X}}(D) \cup \partial_{\overline{X}}(D);$$

- $\overline{X}^D$ est également eulérien.

**Claim**

*Pour $D$ un cycle noir impair, le $D$-complément d'un sous-graphe eulérien couvrant pair (resp. impair) est impair (resp. pair).*

## Schéma de preuve – 9

- $\mathcal{E}$ – l'ensemble des sous-graphes eulériens couvrants de $G$ ;

## Schéma de preuve – 9

- $\mathcal{E}$ – l'ensemble des sous-graphes eulériens couvrants de $G$ ;
- $\mathcal{O}$ – l'ensemble ordonné des cycles noirs impairs de $G$ (triés par nombre croissant de faces à l'intérieur) ;

# Schéma de preuve – 9

- $\mathcal{E}$ – l'ensemble des sous-graphes eulériens couvrants de $G$ ;
- $\mathcal{O}$ – l'ensemble ordonné des cycles noirs impairs de $G$ (triés par nombre croissant de faces à l'intérieur) ;
- Supposons qu'il y a $k$ cycles, $C_1, C_2, \ldots, C_k$, dans $\mathcal{O}$ ;

## Schéma de preuve – 9

- $\mathcal{E}$ – l'ensemble des sous-graphes eulériens couvrants de $G$ ;
- $\mathcal{O}$ – l'ensemble ordonné des cycles noirs impairs de $G$ (triés par nombre croissant de faces à l'intérieur) ;
- Supposons qu'il y a $k$ cycles, $C_1, C_2, \ldots, C_k$, dans $\mathcal{O}$ ;
- Pour tout $i$, $1 \leq i \leq k$, enlever tous les $X \in \mathcal{E}$ qui contiennent soit toutes les arêtes de $C_i$ soit aucunes ;

# Schéma de preuve – 9

- $\mathcal{E}$ – l'ensemble des sous-graphes eulériens couvrants de $G$ ;
- $\mathcal{O}$ – l'ensemble ordonné des cycles noirs impairs de $G$ (triés par nombre croissant de faces à l'intérieur) ;
- Supposons qu'il y a $k$ cycles, $C_1, C_2, \ldots, C_k$, dans $\mathcal{O}$ ;
- Pour tout $i$, $1 \leq i \leq k$, enlever tous les $X \in \mathcal{E}$ qui contiennent soit toutes les arêtes de $C_i$ soit aucunes ;
- Si à l'étape $i$ on enlève de $\mathcal{E}$ un $X$, alors on enlève aussi son $C_i$-complément ;

# Schéma de preuve – 9

- $\mathcal{E}$ – l'ensemble des sous-graphes eulériens couvrants de $G$ ;
- $\mathcal{O}$ – l'ensemble ordonné des cycles noirs impairs de $G$ (triés par nombre croissant de faces à l'intérieur) ;
- Supposons qu'il y a $k$ cycles, $C_1, C_2, \ldots, C_k$, dans $\mathcal{O}$ ;
- Pour tout $i$, $1 \leq i \leq k$, enlever tous les $X \in \mathcal{E}$ qui contiennent soit toutes les arêtes de $C_i$ soit aucunes ;
- Si à l'étape $i$ on enlève de $\mathcal{E}$ un $X$, alors on enlève aussi son $C_i$-complément ;
- De telles paires sont toujours enlevés à la même étape :

**Claim**

*Le nombre de sous-graphes eulériens couvrants pairs enlevés de $\mathcal{E}$ à l'étape $i$ est le même que le nombre de tels sous-graphes impairs.*

## Schéma de preuve – 10

- Lorsque tous les cycles de $\mathcal{O}$ sont enlevés, il n'y a plus de sous-graphes eulériens couvrants impairs dans $\mathcal{E}$ ;

- Lorsque tous les cycles de $\mathcal{O}$ sont enlevés, il n'y a plus de sous-graphes eulériens couvrants impairs dans $\mathcal{E}$ ;

**Claim**

*Les faces blanches de $G$ peuvent être colorées de deux couleurs, rouge et bleu, telles que tout cycle noir impair a une arête dans la frontière d'une face rouge et une dans la frontière d'une face bleue.*

- $\Rightarrow$ Il y a au moins un sous-graphe eulérien couvrant pair qui a une arête dans chaque cycle noir impair de $G$, mais pas toutes les arêtes d'un tel cycle !

# Schéma de preuve – 10

- Lorsque tous les cycles de $\mathcal{O}$ sont enlevés, il n'y a plus de sous-graphes eulériens couvrants impairs dans $\mathcal{E}$ ;

**Claim**

*Les faces blanches de $G$ peuvent être colorées de deux couleurs, rouge et bleu, telles que tout cycle noir impair a une arête dans la frontière d'une face rouge et une dans la frontière d'une face bleue.*

- $\Rightarrow$ Il y a au moins un sous-graphe eulérien couvrant pair qui a une arête dans chaque cycle noir impair de $G$, mais pas toutes les arêtes d'un tel cycle !
- $\Rightarrow$ Il y a plus de sous-graphes eulériens couvrants pairs qu'impairs.

## Schéma de preuve – 10

- Lorsque tous les cycles de $\mathcal{O}$ sont enlevés, il n'y a plus de sous-graphes eulériens couvrants impairs dans $\mathcal{E}$ ;

**Claim**

*Les faces blanches de $G$ peuvent être colorées de deux couleurs, rouge et bleu, telles que tout cycle noir impair a une arête dans la frontière d'une face rouge et une dans la frontière d'une face bleue.*

- $\Rightarrow$ Il y a au moins un sous-graphe eulérien couvrant pair qui a une arête dans chaque cycle noir impair de $G$, mais pas toutes les arêtes d'un tel cycle !
- $\Rightarrow$ Il y a plus de sous-graphes eulériens couvrants pairs qu'impairs.
- $\square$

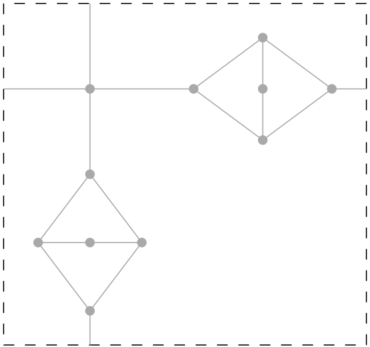
# La planarité est-elle nécessaire ?

# La planarité est-elle nécessaire ?

- Elle l'est !

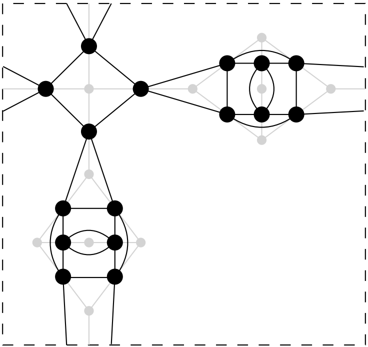
# La planarité est-elle nécessaire ?

- Elle l'est !



# La planarité est-elle nécessaire ?

- Elle l'est !



# Et maintenant ?

**Conjecture**

*Tout graphe plan dont les faces peuvent être colorées en deux couleurs telle qu'une des couleurs n'a que des faces paires est 3-colorable.*

# Et maintenant ?

**Conjecture**

*Tout graphe plan dont les faces peuvent être colorées en deux couleurs telle qu'une des couleurs n'a que des faces paires est 3-colorable.*

**Question**

*Tout graphe plan dont les faces peuvent être colorées en deux couleurs telle qu'une des couleurs n'a que des faces paires est-il 3-choisissable ?*

# Merci

Merci de votre attention.