

Trouver un convexe de poids maximum dans un graphe cordal

Journées Graphes et Algorithmes

PAUL H. EDELMAN* AND ROBERT E. JAMISON**

THE THEORY OF CONVEX GEOMETRIES

I. INTRODUCTION

The purpose of this paper is to develop the foundations of a combinatorial abstraction of convexity that we call *convex geometries*. This work has gone on for several years ([14]–[16], [27]–[32]), and this paper will serve to present the basic aspects of the theory. Some of the results have appeared before. Others have been previously stated without proof, and still others are new. (The authors have previously referred to these objects by the cacophonous name ‘antimatroids’. We hope there is time to rectify this and that Gresham’s Law does not apply to mathematical nomenclature.)

Our approach to abstract convexity has many advantages. It is broad enough to encompass all the standard examples as well as many less standard ones. There are many natural, equivalent ways of defining convex geometries. The lattice of convex sets can be completely characterized. Our axiomatization allows one to apply techniques of graph theory and ordered set theory as well as techniques from standard convexity theory. Recently it has been discovered that convex geometries are dual to an important class of greedoids.

Jean Cardinal, Jean-Paul Doignon, K.M.

Université libre de Bruxelles

Novembre 2018

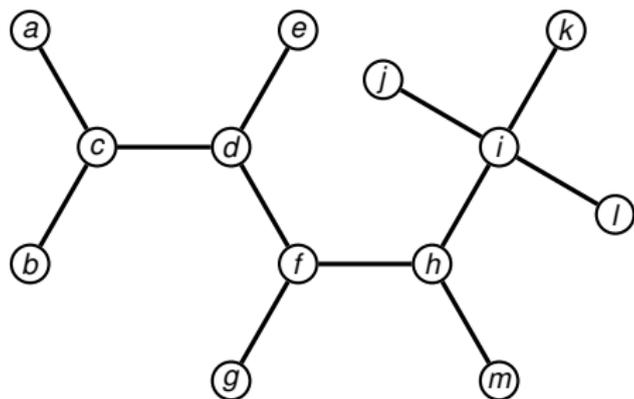
Algorithm 1: Finding a maximum d_K -rooted convex set in a chordal graph

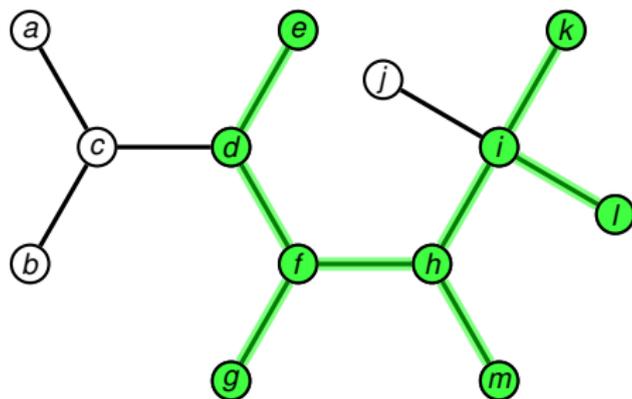
Input: a chordal graph G and its clique-separator graph \mathcal{G} , a maximal clique K of G , a weight function w , the function label

Output: a maximum-weight K -rooted convex set C

- 1 while $\exists a = (S_1, S_2) \in \text{Arc}_{\mathcal{G}}$ such that a is K -blocking do
- 2 Identify the vertices of $(G \ominus a) - S_1$ into a new vertex z_a
- 3 $w(z_a) \leftarrow w(\text{label}(a)) - w(S_1)$
- 4 Add a dummy vertex to the new maximal clique $\{z_a\} \cup S_1$
- 5 Update \mathcal{G}
- 6 Use Picard’s algorithm to compute a maximal weight d_K -rooted convex set C of G
- 7 Return C

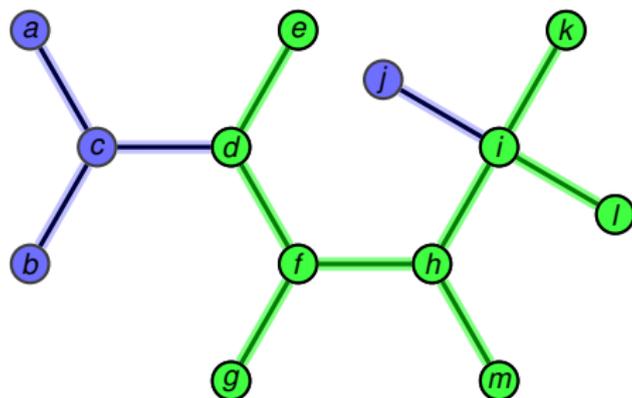
Introduction: ensembles convexes et faisables pour un arbre





Ensemble convexe Sommets d'un sous-arbre.

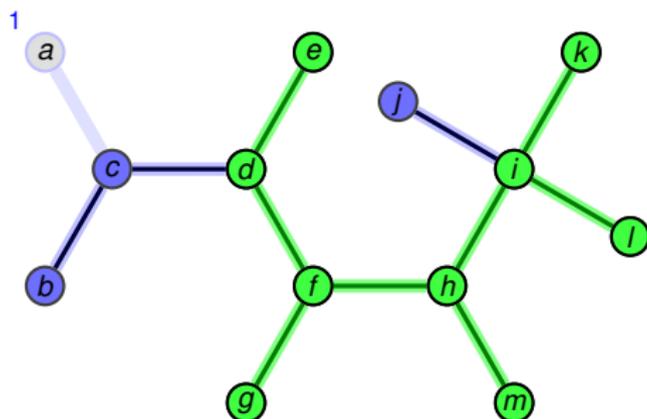
Introduction: ensembles convexes et faisables pour un arbre



Ensemble convexe Sommets d'un sous-arbre.

Ensemble faisable Processus d'élimination sur les feuilles.

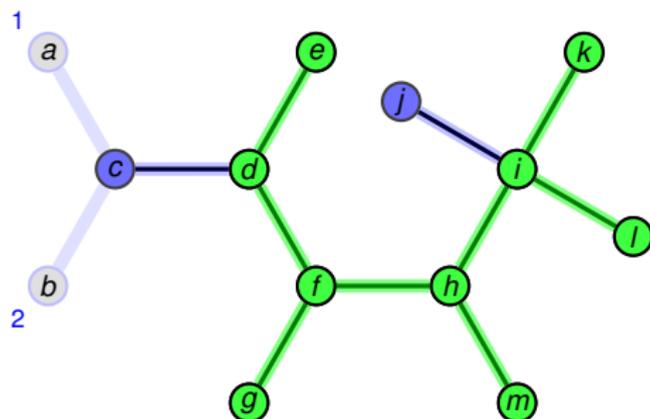
Introduction: ensembles convexes et faisables pour un arbre



Ensemble convexe Sommets d'un sous-arbre.

Ensemble faisable Processus d'élimination sur les feuilles.

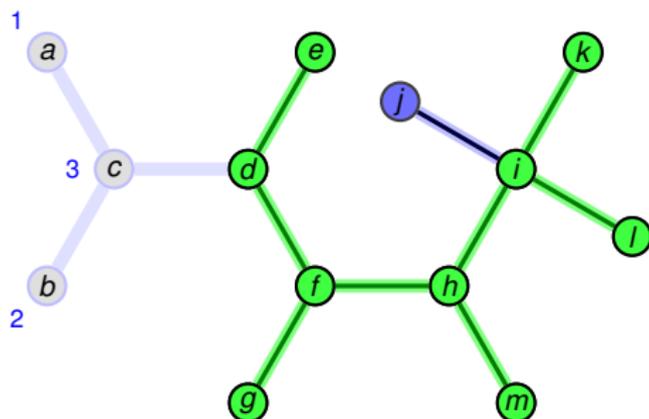
Introduction: ensembles convexes et faisables pour un arbre



Ensemble convexe Sommets d'un sous-arbre.

Ensemble faisable Processus d'élimination sur les feuilles.

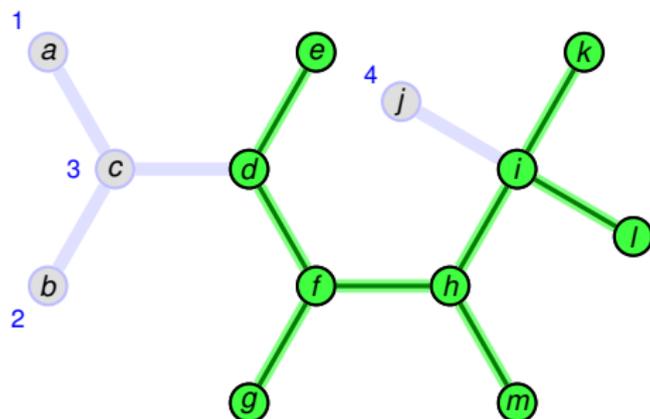
Introduction: ensembles convexes et faisables pour un arbre



Ensemble convexe Sommets d'un sous-arbre.

Ensemble faisable Processus d'élimination sur les feuilles.

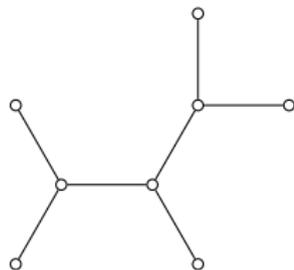
Introduction: ensembles convexes et faisables pour un arbre



Ensemble convexe Sommets d'un sous-arbre.

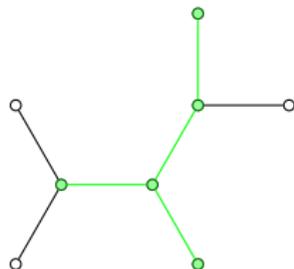
Ensemble faisable Processus d'élimination sur les feuilles.

Les arbres



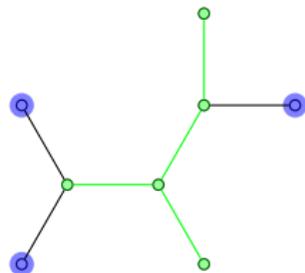
Les arbres

- sous-arbres



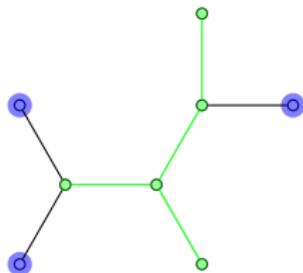
Les arbres

- sous-arbres
- élimination des feuilles

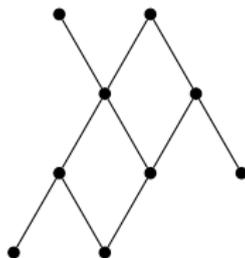


Les arbres

- sous-arbres
- élimination des feuilles

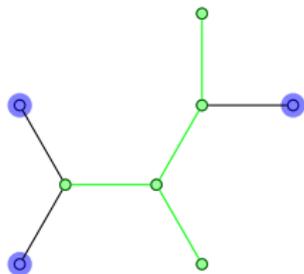


Les posets



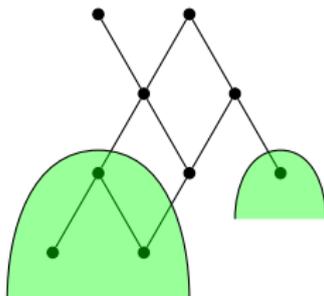
Les arbres

- sous-arbres
- élimination des feuilles



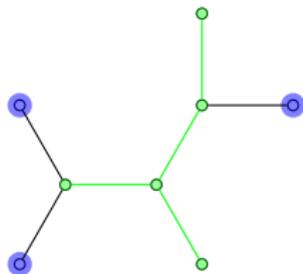
Les posets

- idéaux



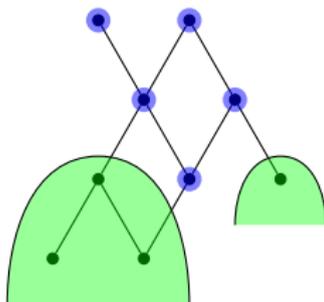
Les arbres

- sous-arbres
- élimination des feuilles



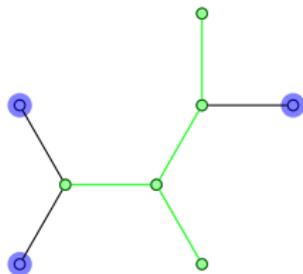
Les posets

- idéaux
- élimination des éléments max.



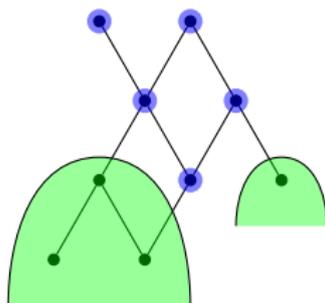
Les arbres

- sous-arbres
- élimination des feuilles



Les posets

- idéaux
- élimination des éléments max.

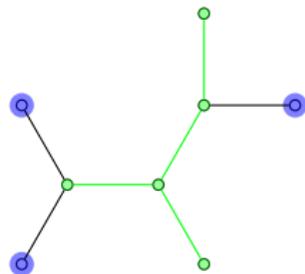


Points dans \mathbb{R}^d



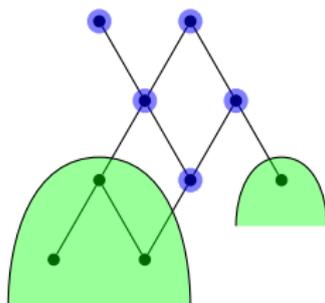
Les arbres

- sous-arbres
- élimination des feuilles



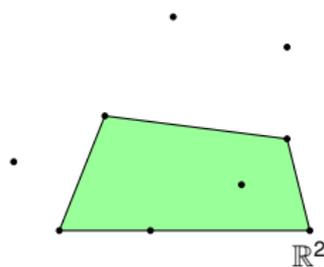
Les posets

- idéaux
- élimination des éléments max.



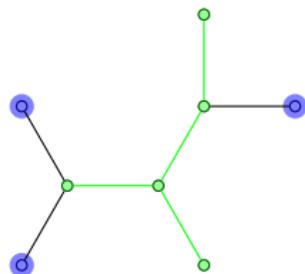
Points dans \mathbb{R}^d

- enveloppe convexe



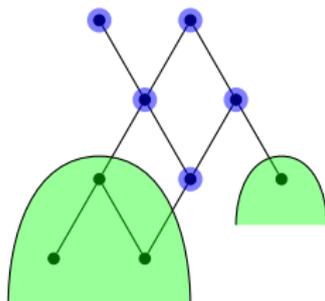
Les arbres

- sous-arbres
- élimination des feuilles



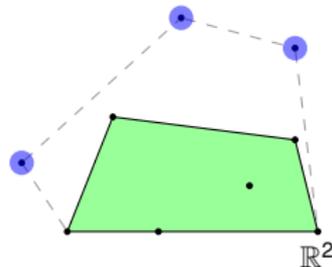
Les posets

- idéaux
- élimination des éléments max.



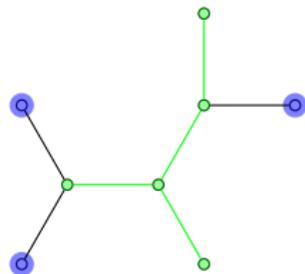
Points dans \mathbb{R}^d

- enveloppe convexe
- élimination des points extrêmes



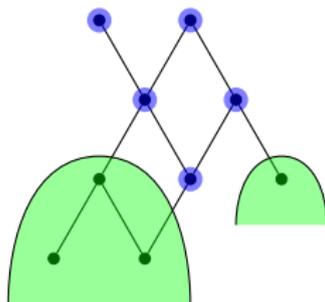
Les arbres

- sous-arbres
- élimination des feuilles



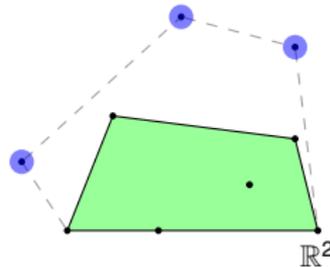
Les posets

- idéaux
- élimination des éléments max.



Points dans \mathbb{R}^d

- enveloppe convexe
- élimination des points extrêmes



Géométries convexes

Soient

- V un ensemble fini,
- $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ avec $\emptyset \in \mathcal{C}$.

Soient

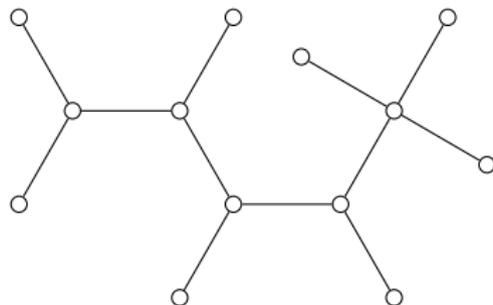
- V un ensemble fini,
- $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ avec $\emptyset \in \mathcal{C}$.

Definition

Le couple (V, \mathcal{C}) est une **géométrie convexe** s'il satisfait les deux conditions suivantes:

- (AM1) \mathcal{C} stable par intersection.
- (AM2) Pour tout convexe C (différent de V) il existe un élément f extérieur à C tel que $C \cup \{f\}$ est convexe.

Les ensembles dans \mathcal{C} sont les **convexes**.



Géométries convexes: définition formelle

Soient

- V un ensemble fini,
- $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ avec $\emptyset \in \mathcal{C}$.

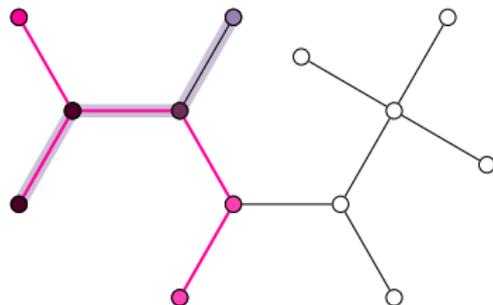
Definition

Le couple (V, \mathcal{C}) est une **géométrie convexe** s'il satisfait les deux conditions suivantes:

(AM1) \mathcal{C} stable par intersection.

(AM2) Pour tout convexe C (différent de V) il existe un élément f extérieur à C tel que $C \cup \{f\}$ est convexe.

Les ensembles dans \mathcal{C} sont les **convexes**.



Soient

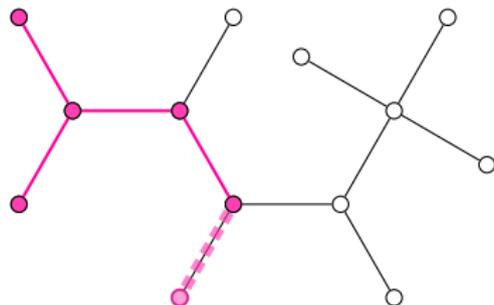
- V un ensemble fini,
- $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ avec $\emptyset \in \mathcal{C}$.

Definition

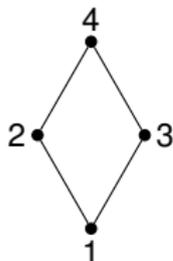
Le couple (V, \mathcal{C}) est une **géométrie convexe** s'il satisfait les deux conditions suivantes:

- (AM1) \mathcal{C} stable par intersection.
- (AM2) Pour tout convexe C (différent de V) il existe un élément f extérieur à C tel que $C \cup \{f\}$ est convexe.

Les ensembles dans \mathcal{C} sont les **convexes**.

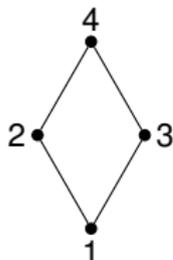


Soit l'ensemble partiellement ordonné $P = (V, \leq)$ avec la diagramme de Hasse suivant:



- Nous obtenons une géométrie convexe (V, \mathcal{C}) , avec \mathcal{C} l'ensemble des idéaux de P .

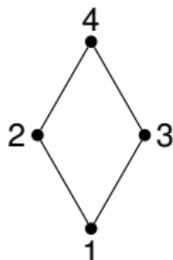
Soit l'ensemble partiellement ordonné $P = (V, \leq)$ avec la diagramme de Hasse suivant:



- Nous obtenons une géométrie convexe (V, \mathcal{C}) , avec \mathcal{C} l'ensemble des idéaux de P .

$$\mathcal{C} = \{ \quad \quad \quad \}$$

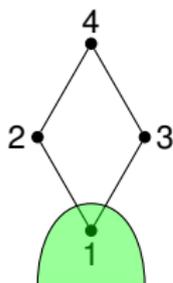
Soit l'ensemble partiellement ordonné $P = (V, \leq)$ avec la diagramme de Hasse suivant:



- Nous obtenons une géométrie convexe (V, \mathcal{C}) , avec \mathcal{C} l'ensemble des idéaux de P .

$$\mathcal{C} = \{ \emptyset, \quad \}$$

Soit l'ensemble partiellement ordonné $P = (V, \leq)$ avec la diagramme de Hasse suivant:

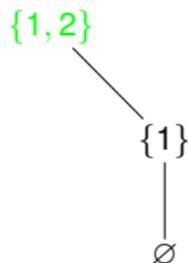
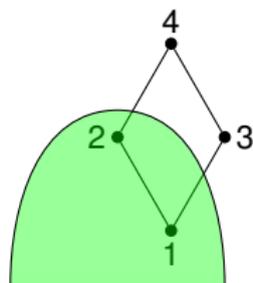


- Nous obtenons une géométrie convexe (V, \mathcal{C}) , avec \mathcal{C} l'ensemble des idéaux de P .

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1\}, \}$$

Géométries convexes, posets et idéaux

Soit l'ensemble partiellement ordonné $P = (V, \leq)$ avec la diagramme de Hasse suivant:

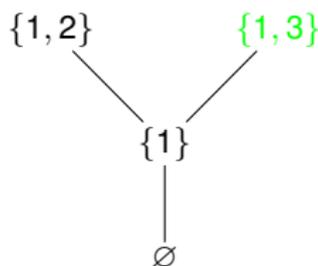
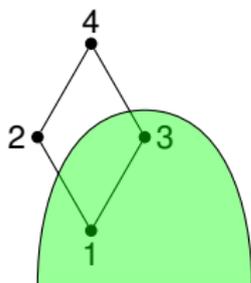


- Nous obtenons une géométrie convexe (V, \mathcal{C}) , avec \mathcal{C} l'ensemble des idéaux de P .

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \}$$

Géométries convexes, posets et idéaux

Soit l'ensemble partiellement ordonné $P = (V, \leq)$ avec la diagramme de Hasse suivant:

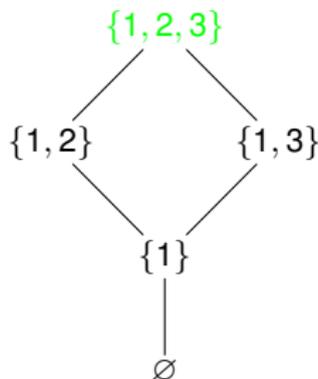
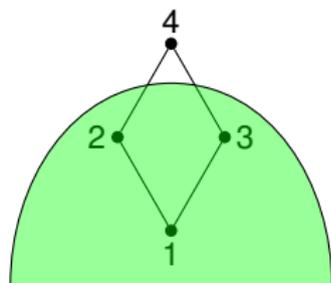


- Nous obtenons une géométrie convexe (V, \mathcal{C}) , avec \mathcal{C} l'ensemble des idéaux de P .

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \}$$

Géométries convexes, posets et idéaux

Soit l'ensemble partiellement ordonné $P = (V, \leq)$ avec la diagramme de Hasse suivant:

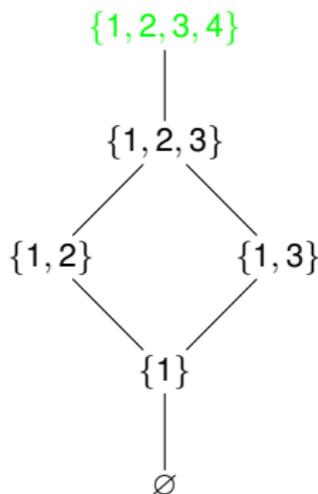
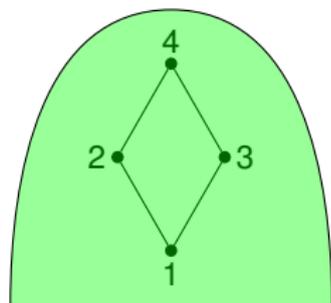


- Nous obtenons une géométrie convexe (V, \mathcal{C}) , avec \mathcal{C} l'ensemble des idéaux de P .

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \quad \}$$

Géométries convexes, posets et idéaux

Soit l'ensemble partiellement ordonné $P = (V, \leq)$ avec la diagramme de Hasse suivant:



- Nous obtenons une géométrie convexe (V, \mathcal{C}) , avec \mathcal{C} l'ensemble des idéaux de P .

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

Ceci donne lieu au problème naturel suivant.

Problème

Étant donné une **géométrie convexe** (V, \mathcal{C}) et une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver **un convexe** C qui **maximise** la valeur de

$$w(C) = \sum_{c \in C} w(c).$$

Ceci donne lieu au problème naturel suivant.

Problème

Étant donné une **géométrie convexe** (V, \mathcal{C}) et une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver **un convexe** C qui **maximise** la valeur de

$$w(C) = \sum_{c \in C} w(c).$$

Le problème est **NP-difficile en général**, mais certains cas particuliers peuvent être résolus en temps polynomial.

Ceci donne lieu au problème naturel suivant.

Problème

Étant donné une **géométrie convexe** (V, \mathcal{C}) et une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver un **convexe** C qui **maximise** la valeur de

$$w(C) = \sum_{c \in C} w(c).$$

Le problème est **NP-difficile en général**, mais certains cas particuliers peuvent être résolus en temps polynomial.

Picard, 1975

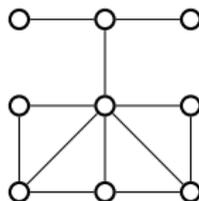
Soient $P = (V, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver un idéal de poids maximum peut être fait en temps polynomial.

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .

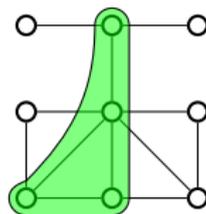
Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .



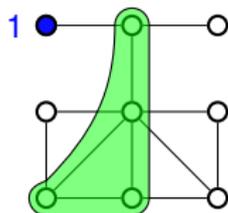
Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .



Definition

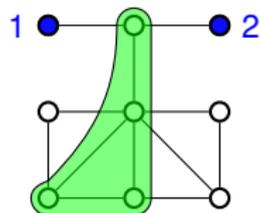
Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .



Notons que les ensembles faisables (compléments des convexes) sont obtenus grâce à une élimination successive des sommets simpliciaux.

Definition

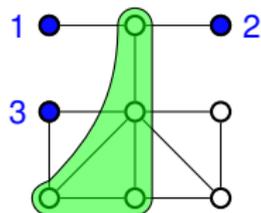
Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .



Notons que les ensembles faisables (compléments des convexes) sont obtenus grâce à une élimination successive des sommets simpliciaux.

Definition

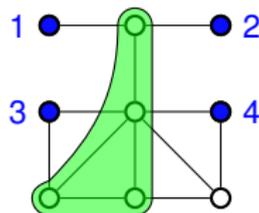
Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .



Notons que les ensembles faisables (compléments des convexes) sont obtenus grâce à une élimination successive des sommets simpliciaux.

Definition

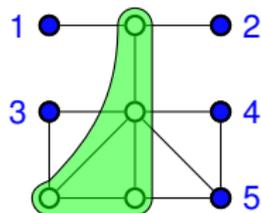
Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .



Notons que les ensembles faisables (compléments des convexes) sont obtenus grâce à une élimination successive des sommets simpliciaux.

Definition

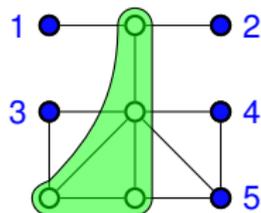
Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .



Notons que les ensembles faisables (compléments des convexes) sont obtenus grâce à une élimination successive des sommets simpliciaux.

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .

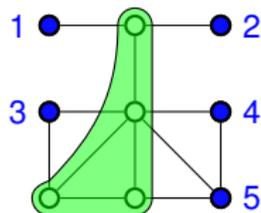


Notons que les ensembles faisables (compléments des convexes) sont obtenus grâce à une élimination successive des sommets simpliciaux.

- Un graphe G est **cordal** si chacun de ses cycles de quatre sommets ou plus possède une corde.

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $C \subseteq V$ est **convexe** si C contient l'ensemble des sommets de chaque chemin sans corde entre deux sommets de C .



Notons que les ensembles faisables (compléments des convexes) sont obtenus grâce à une élimination successive des sommets simpliciaux.

- Un graphe G est **cordal** si chacun de ses cycles de quatre sommets ou plus possède une corde.

Jamison, 1982

Soient $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{C} l'ensemble des convexes de ce graphe.

(V, \mathcal{C}) est une géométrie convexe $\Leftrightarrow G$ est cordal.

Quid d'un résultat d'optimisation pour les graphes cordaux.

Problème

Étant donné un **graphe cordal** (V, E) et une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver un **convexe** C qui **maximise** la valeur de

$$w(C) = \sum_{c \in C} w(c).$$

Quid d'un résultat d'optimisation pour les graphes cordaux.

Problème

Étant donné un **graphe cordal** (V, E) et une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver un **convexe** C qui **maximise** la valeur de

$$w(C) = \sum_{c \in C} w(c).$$

- Facile si G est un arbre (Maffioli, 1991).
- Facile si G est un graphe scindable (Cardinal, Doignon et M., 2017).

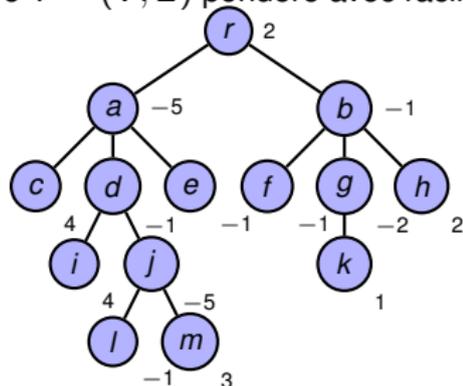
Problème

Soit un **arbre** $T = (V, E)$ **enraciné** en $r \in V$, ainsi qu'une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver un **sous-arbre** de poids total positif $T' = (V', E')$ de T avec racine r qui **maximise** $w(V')$.

Problème

Soit un arbre $T = (V, E)$ enraciné en $r \in V$, ainsi qu'une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver un sous-arbre de poids total positif $T' = (V', E')$ de T avec racine r qui maximise $w(V')$.

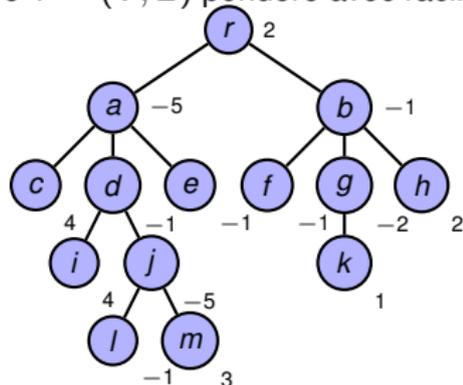
Arbre $T = (V, E)$ pondéré avec racine r



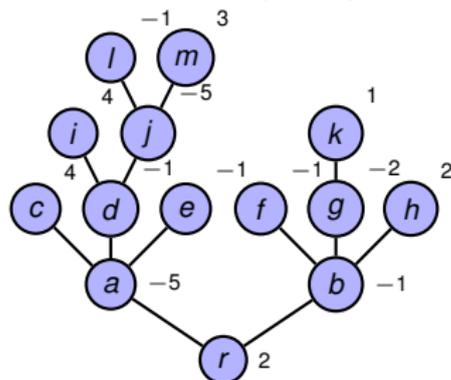
Problème

Soit un **arbre** $T = (V, E)$ **enraciné** en $r \in V$, ainsi qu'une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver un **sous-arbre** de poids total positif $T' = (V', E')$ de T avec racine r qui **maximise** $w(V')$.

Arbre $T = (V, E)$ pondéré avec racine r



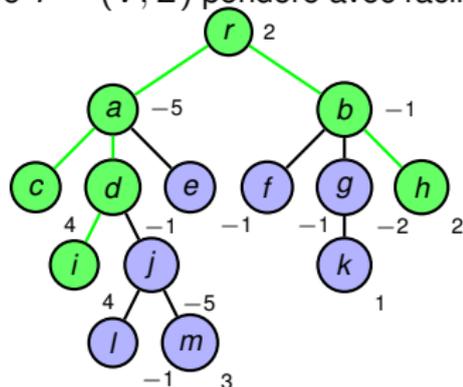
Poset $P_r = (V, \leq_r)$



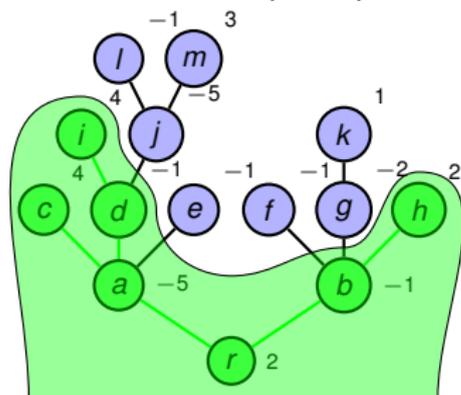
Problème

Soit un **arbre** $T = (V, E)$ **enraciné** en $r \in V$, ainsi qu'une fonction de poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}$, trouver un **sous-arbre** de poids total positif $T' = (V', E')$ de T avec racine r qui **maximise** $w(V')$.

Arbre $T = (V, E)$ pondéré avec racine r

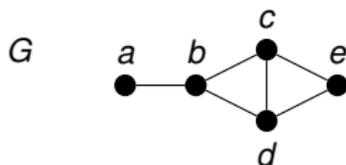


Poset $P_r = (V, \leq_r)$



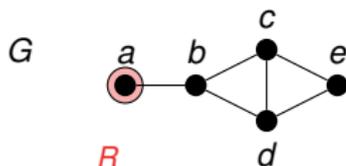
Sous-arbres de T contenant r (plus \emptyset) \Leftrightarrow Idéaux de P

Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal
 $G = (V, E)$.



Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal
 $G = (V, E)$.

- Sélectionnons un ensemble de sommets R comme "racine" (\subseteq une clique).

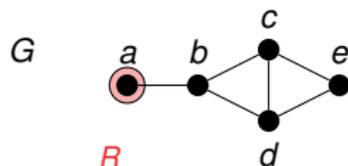


L'ordre partiel $P_R = (V, \leq_R)$

Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal $G = (V, E)$.

- Sélectionnons un ensemble de sommets R comme "racine" (\subseteq une clique).
- Définissons une relation d'ordre partiel \leq_R sur les sommets dans V .

$u \leq_R v \Leftrightarrow$ il existe un chemin sans corde (v, \dots, r) avec r dans R qui contient u .

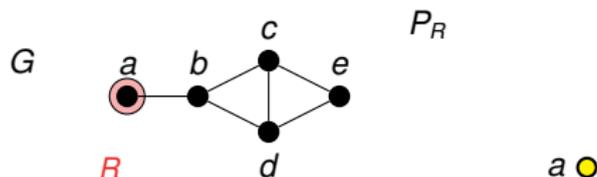


L'ordre partiel $P_R = (V, \leq_R)$

Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal
 $G = (V, E)$.

- Sélectionnons un ensemble de sommets R comme "racine" (\subseteq une clique).
- Définissons une relation d'ordre partiel \leq_R sur les sommets dans V .

$u \leq_R v \Leftrightarrow$ il existe un chemin sans corde (v, \dots, r) avec r dans R qui contient u .

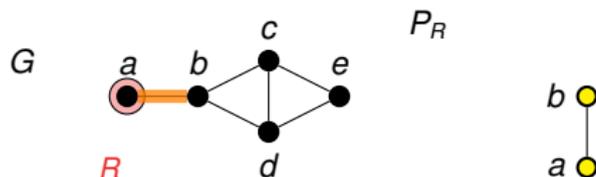


L'ordre partiel $P_R = (V, \leq_R)$

Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal $G = (V, E)$.

- Sélectionnons un ensemble de sommets R comme "racine" (\subseteq une clique).
- Définissons une relation d'ordre partiel \leq_R sur les sommets dans V .

$u \leq_R v \Leftrightarrow$ il existe un chemin sans corde (v, \dots, r) avec r dans R qui contient u .

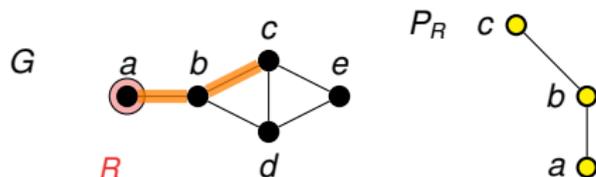


L'ordre partiel $P_R = (V, \leq_R)$

Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal
 $G = (V, E)$.

- Sélectionnons un ensemble de sommets R comme "racine" (\subseteq une clique).
- Définissons une relation d'ordre partiel \leq_R sur les sommets dans V .

$u \leq_R v \Leftrightarrow$ il existe un chemin sans corde (v, \dots, r) avec r dans R qui contient u .

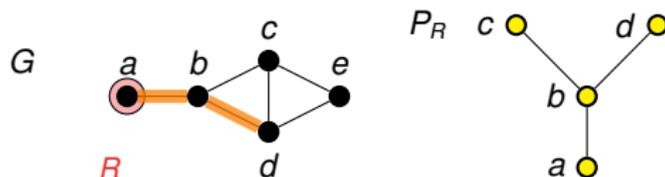


L'ordre partiel $P_R = (V, \leq_R)$

Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal
 $G = (V, E)$.

- Sélectionnons un ensemble de sommets R comme "racine" (\subseteq une clique).
- Définissons une relation d'ordre partiel \leq_R sur les sommets dans V .

$u \leq_R v \Leftrightarrow$ il existe un chemin sans corde (v, \dots, r) avec r dans R qui contient u .

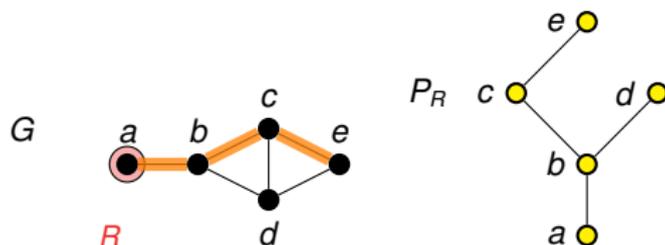


L'ordre partiel $P_R = (V, \leq_R)$

Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal $G = (V, E)$.

- Sélectionnons un ensemble de sommets R comme "racine" (\subseteq une clique).
- Définissons une relation d'ordre partiel \leq_R sur les sommets dans V .

$u \leq_R v \Leftrightarrow$ il existe un chemin sans corde (v, \dots, r) avec r dans R qui contient u .

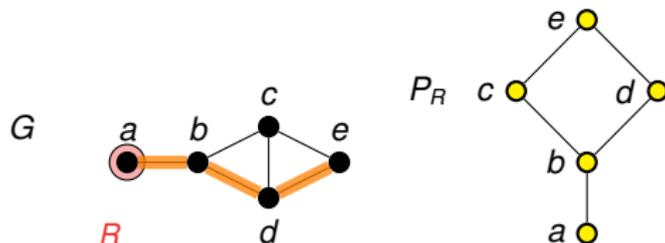


L'ordre partiel $P_R = (V, \leq_R)$

Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal
 $G = (V, E)$.

- Sélectionnons un ensemble de sommets R comme "racine" (\subseteq une clique).
- Définissons une relation d'ordre partiel \leq_R sur les sommets dans V .

$u \leq_R v \Leftrightarrow$ il existe un chemin sans corde (v, \dots, r) avec r dans R qui contient u .

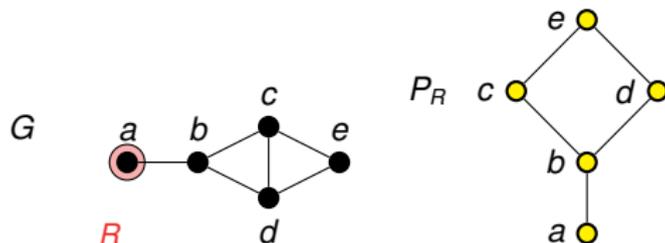


L'ordre partiel $P_R = (V, \leq_R)$

Tentons de généraliser l'algorithme des arbres pour un graphe cordal $G = (V, E)$.

- Sélectionnons un ensemble de sommets R comme "racine" (\subseteq une clique).
- Définissons une relation d'ordre partiel \leq_R sur les sommets dans V .

$u \leq_R v \Leftrightarrow$ il existe un chemin sans corde (v, \dots, r) avec r dans R qui contient u .

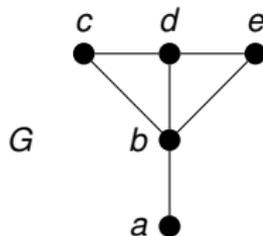


Nous pouvons vérifier que sur cet exemple nous avons:

- Ensembles convexes de G contenant R (plus \emptyset) \Leftrightarrow Idéaux de P_R .

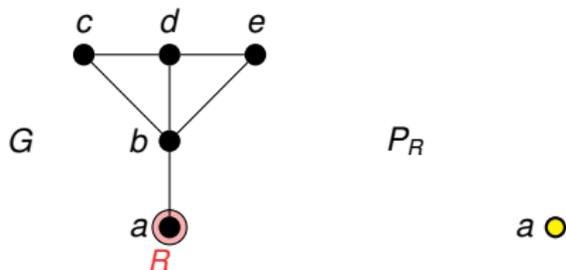
Mais cela ne suffit pas

Malheureusement il existe des graphes cordaux qui ne possèdent pas cette correspondance.



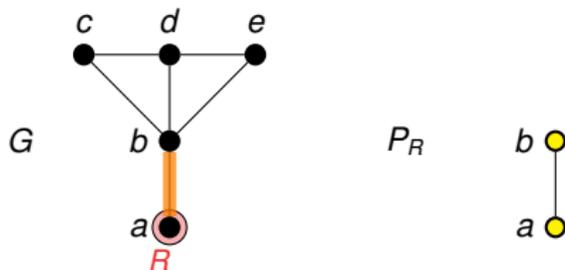
Mais cela ne suffit pas

Malheureusement il existe des graphes cordaux qui ne possèdent pas cette correspondance.



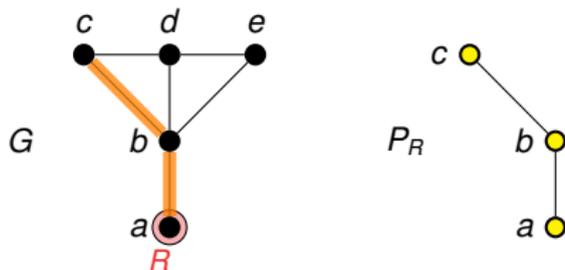
Mais cela ne suffit pas

Malheureusement il existe des graphes cordaux qui ne possèdent pas cette correspondance.



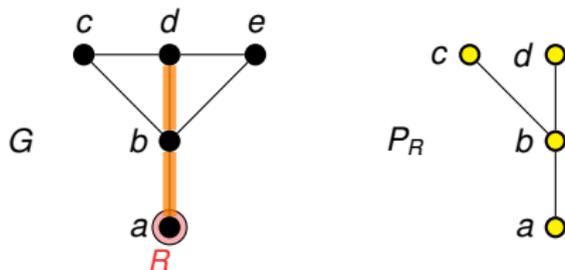
Mais cela ne suffit pas

Malheureusement il existe des graphes cordaux qui ne possèdent pas cette correspondance.



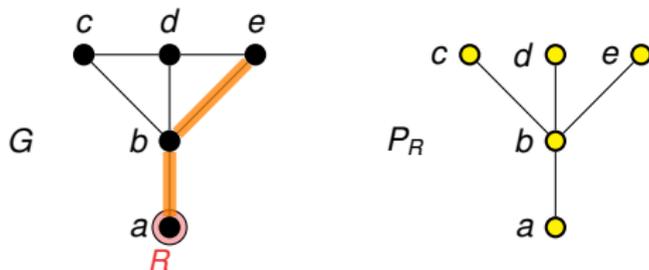
Mais cela ne suffit pas

Malheureusement il existe des graphes cordaux qui ne possèdent pas cette correspondance.



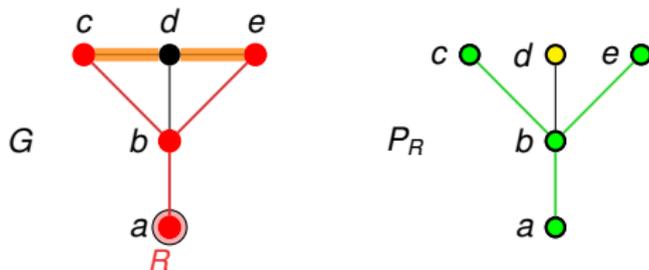
Mais cela ne suffit pas

Malheureusement il existe des graphes cordaux qui ne possèdent pas cette correspondance.



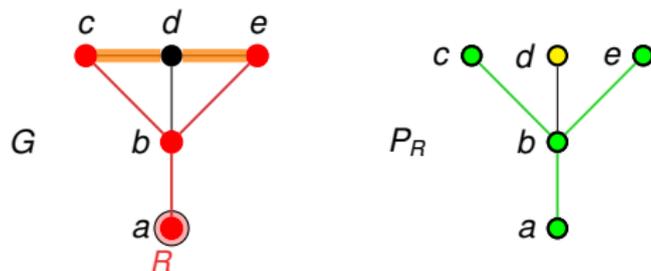
Mais cela ne suffit pas

Malheureusement il existe des graphes cordaux qui ne possèdent pas cette correspondance.



Mais cela ne suffit pas

Malheureusement il existe des graphes cordaux qui ne possèdent pas cette correspondance.

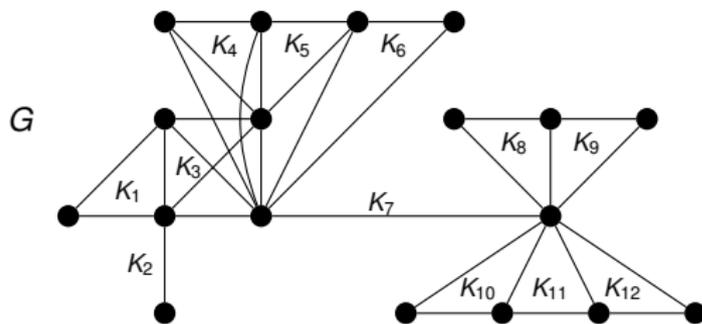


Nous pouvons vérifier que:

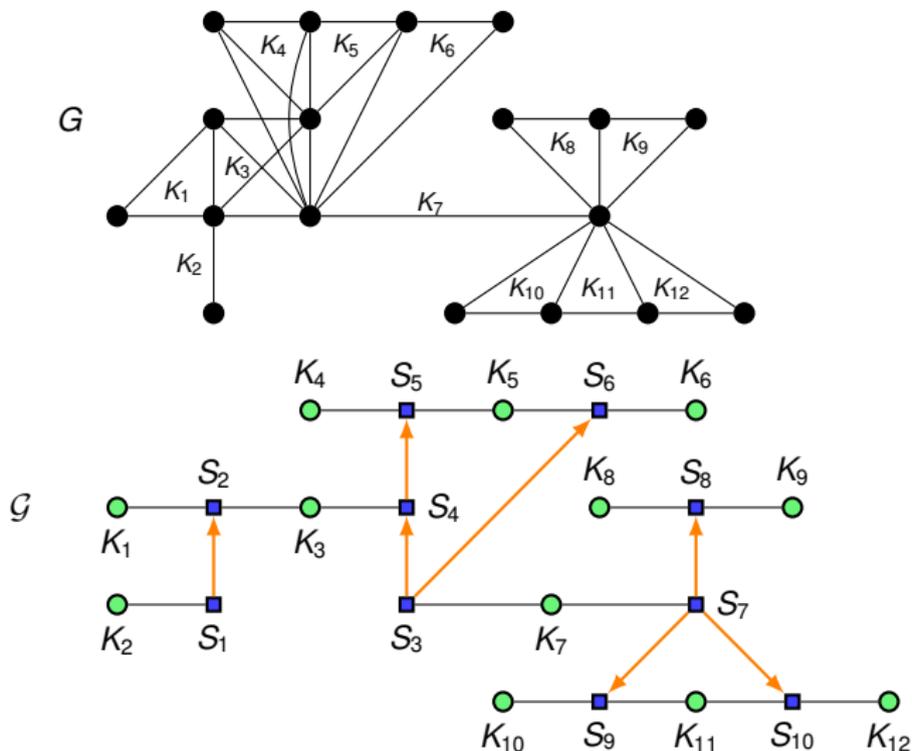
- Ensemble convexe de G contenant $R \Rightarrow$ Idéal de P_R .
- Ensemble convexe de G contenant $R \not\Rightarrow$ Idéal de P_R .

Essayons d'expliquer ce phénomène.

Le graphe clique-séparateur pour les graphes cordaux (Ibarra, 2007)



Le graphe clique-séparateur pour les graphes cordaux (Ibarra, 2007)



Un premier résultat

Soient un graphe $G = (V, E)$ cordal (supposons G connexe) avec \mathcal{G} son graphe clique-séparateur, et $R \subset V$ une racine.

Un premier résultat

Soient un graphe $G = (V, E)$ cordal (supposons G connexe) avec \mathcal{G} son graphe clique-séparateur, et $R \subset V$ une racine.

Cardinal, Doignon et M.

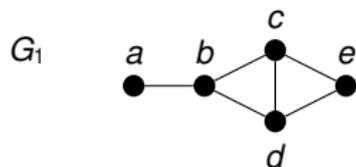
Si dans \mathcal{G} on peut se déplacer d'un sommet intersectant R à n'importe quel autre sans emprunter d'arc "dans le bon sens". Alors les idéaux de P_R correspondent exactement aux convexes de G contenant R (plus \emptyset).

Un premier résultat

Soient un graphe $G = (V, E)$ cordal (supposons G connexe) avec \mathcal{G} son graphe clique-séparateur, et $R \subset V$ une racine.

Cardinal, Doignon et M.

Si dans \mathcal{G} on peut se déplacer d'un sommet intersectant R à n'importe quel autre sans emprunter d'arc "dans le bon sens". Alors les idéaux de P_R correspondent exactement aux convexes de G contenant R (plus \emptyset).

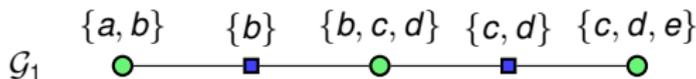
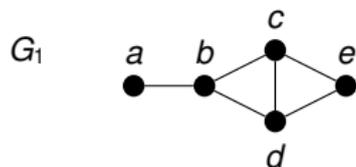


Un premier résultat

Soient un graphe $G = (V, E)$ cordal (supposons G connexe) avec \mathcal{G} son graphe clique-séparateur, et $R \subset V$ une racine.

Cardinal, Doignon et M.

Si dans \mathcal{G} on peut se déplacer d'un sommet intersectant R à n'importe quel autre sans emprunter d'arc "dans le bon sens". Alors les idéaux de P_R correspondent exactement aux convexes de G contenant R (plus \emptyset).

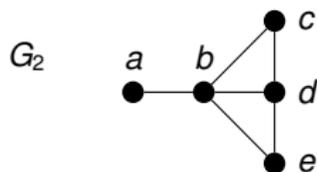
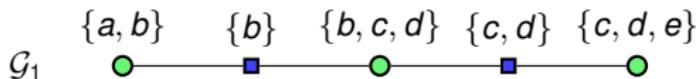
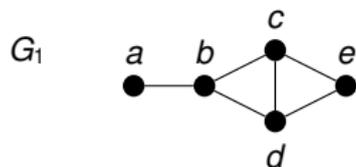


Un premier résultat

Soient un graphe $G = (V, E)$ cordal (supposons G connexe) avec \mathcal{G} son graphe clique-séparateur, et $R \subset V$ une racine.

Cardinal, Doignon et M.

Si dans \mathcal{G} on peut se déplacer d'un sommet intersectant R à n'importe quel autre sans emprunter d'arc "dans le bon sens". Alors les idéaux de P_R correspondent exactement aux convexes de G contenant R (plus \emptyset).

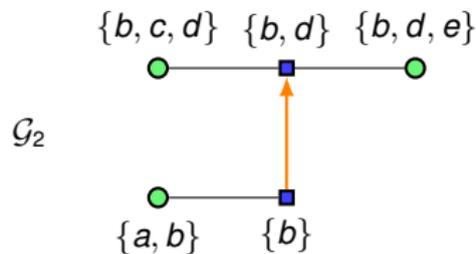
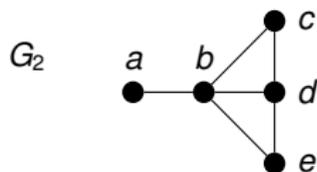
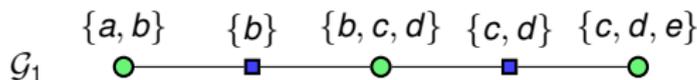
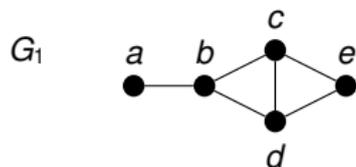


Un premier résultat

Soient un graphe $G = (V, E)$ cordal (supposons G connexe) avec \mathcal{G} son graphe clique-séparateur, et $R \subset V$ une racine.

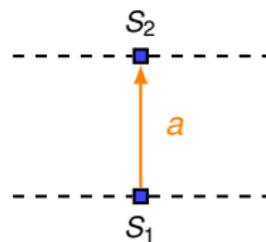
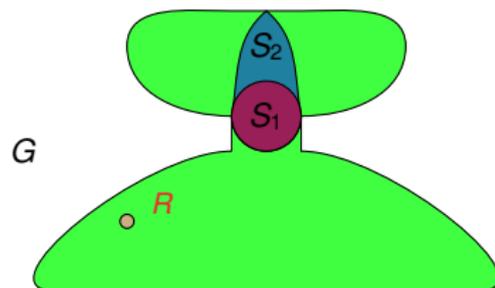
Cardinal, Doignon et M.

Si dans \mathcal{G} on peut se déplacer d'un sommet intersectant R à n'importe quel autre sans emprunter d'arc "dans le bon sens". Alors les idéaux de P_R correspondent exactement aux convexes de G contenant R (plus \emptyset).



Voyons comment gérer les mauvais arcs du graphe clique-séparateur.

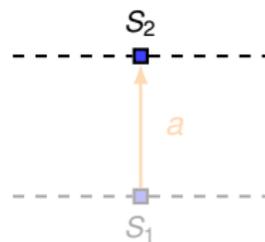
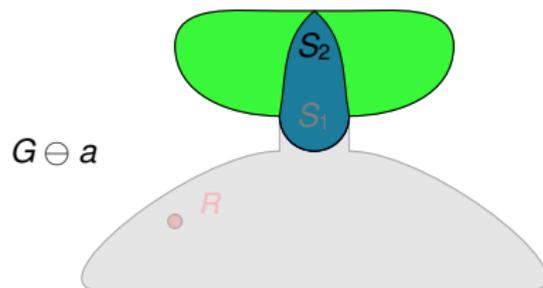
- Nous cherchons le convexe de G de poids maximum qui contient R .



Comment s'en sortir ?

Voyons comment gérer les mauvais arcs du graphe clique-séparateur.

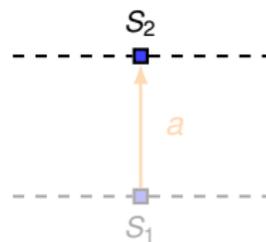
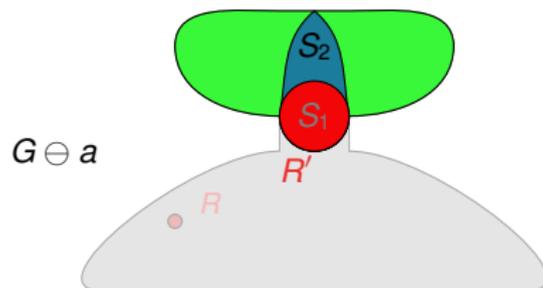
- Nous cherchons le convexe de G de poids maximum qui contient R .



Comment s'en sortir ?

Voyons comment gérer les mauvais arcs du graphe clique-séparateur.

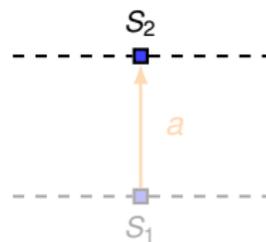
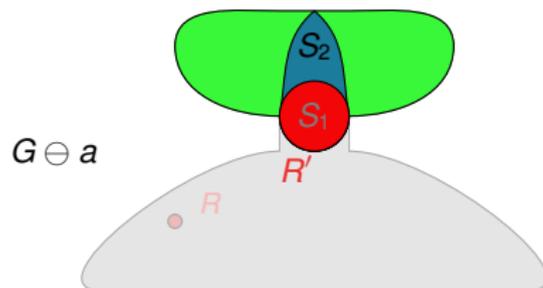
- Nous cherchons le convexe de G de poids maximum qui contient R .



Comment s'en sortir ?

Voyons comment gérer les mauvais arcs du graphe clique-séparateur.

- Nous cherchons le convexe de G de poids maximum qui contient R .

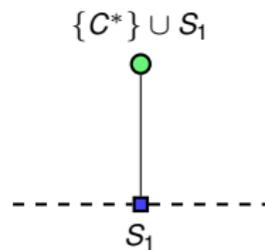
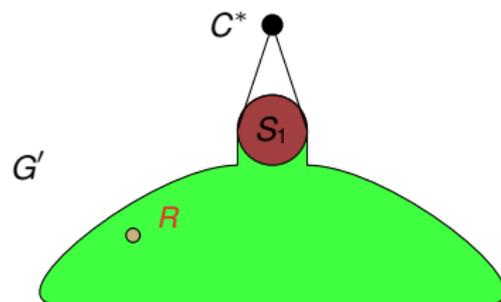


- Solution optimale dans le sous-problème: C (par le théorème précédent), fixons $C^* = C \setminus S_1$.

Comment s'en sortir ?

Voyons comment gérer les mauvais arcs du graphe clique-séparateur.

- Nous cherchons le convexe de G de poids maximum qui contient R .



Cardinal, Doignon et M.

Étant donné un graphe cordal G , il est possible de trouver un convexe de poids maximum en temps

$$O\left(|V|^2|E|^2 \log\left(\frac{|V|^2}{|E|}\right)\right).$$

Cardinal, Doignon et M.

Étant donné un graphe cordal G , il est possible de trouver un convexe de poids maximum en temps

$$O\left(|V|^2|E|^2 \log\left(\frac{|V|^2}{|E|}\right)\right).$$

Ce résultat repose en partie sur:

- L'algorithme de Ibarra pour générer le graphe clique-séparateur.
- L'algorithme de Picard pour trouver un idéal de poids maximum dans un ensemble partiellement ordonné.

Quelques détails (sous le tapis) de cette présentation:

Quelques détails (sous le tapis) de cette présentation:

- Il faut effectuer la recherche pour chaque racine potentielle.

Quelques détails (sous le tapis) de cette présentation:

- Il faut effectuer la recherche pour chaque racine potentielle.
- Il faut prouver que P_R est un ensemble partiellement ordonné.

Quelques détails (sous le tapis) de cette présentation:

- Il faut effectuer la recherche pour chaque racine potentielle.
- Il faut prouver que P_R est un ensemble partiellement ordonné.
- Pour les preuves formelles, un sommet "bidon" de poids nul est ajouté à chaque clique maximal. Ceci afin de faciliter l'écriture des démonstrations.

Quelques détails (sous le tapis) de cette présentation:

- Il faut effectuer la recherche pour chaque racine potentielle.
- Il faut prouver que P_R est un ensemble partiellement ordonné.
- Pour les preuves formelles, un sommet "bidon" de poids nul est ajouté à chaque clique maximal. Ceci afin de faciliter l'écriture des démonstrations.
- Quelques étapes techniques pour gérer les arcs "en cascade" dans le graphe clique-séparateur.

Quelques détails (sous le tapis) de cette présentation:

- Il faut effectuer la recherche pour chaque racine potentielle.
- Il faut prouver que P_R est un ensemble partiellement ordonné.
- Pour les preuves formelles, un sommet "bidon" de poids nul est ajouté à chaque clique maximal. Ceci afin de faciliter l'écriture des démonstrations.
- Quelques étapes techniques pour gérer les arcs "en cascade" dans le graphe clique-séparateur.

Un préprint du papier se trouvent sur arXiv: "Finding a maximum-weight convex set in a chordal graph".

Merci de votre attention

Quelques conseils pour la présentation:

- Il faut identifier chaque racine potentielle.
- Il faut utiliser un ensemble partiellement ordonné.
- Pour les racines, un "bidon" de poids nul est ajouté à chaque arête. Cela a grandement facilité l'écriture des démonstrations.
- Quelques techniques pour gérer les arcs "en cascade" dans le graphe cliqué.

Un préprint du papier se trouve sur arXiv: [Finding a maximum-weight convex set in a chordal graph](#)

