

Coloration du carré des graphes planaires sans C_4

Ilkyoo Choi, Daniel W. Cranston, Théo Pierron

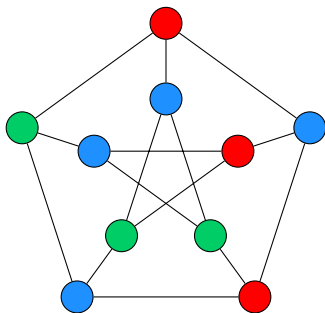
université
de BORDEAUX



JGA 2018

Coloration traditionnelle

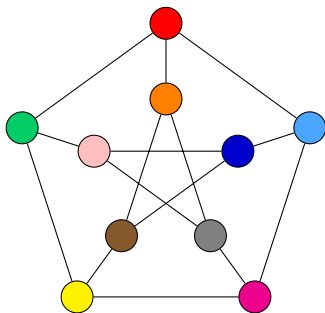
Colorier chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents reçoivent deux couleurs différentes :



Nombre minimum de couleurs = $\chi(G)$.

Coloration de carré

Colorer le carré d'un graphe \Leftrightarrow tous les sommets à distance au plus 2 reçoivent des couleurs différentes.



Diamètre 2 $\Rightarrow \chi(G^2) = 10$.

Bornes naïves

Pour tout graphe G ,

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi(G^2)$$

Bornes naïves

Pour tout graphe G ,

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi(G^2) \leq \Delta(G)^2 + 1$$

Bornes naïves

Pour tout graphe G ,

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi(G^2) \leq \Delta(G)^2 + 1$$

- Borne supérieure atteinte par Petersen.

Bornes naïves

Pour tout graphe G ,

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi(G^2) \leq \Delta(G)^2 + 1$$

- Borne supérieure atteinte par Petersen.
- Bon ordre de grandeur pour grand Δ .

Le cas planaire – Borne supérieure

Meilleure borne actuelle (Molloy and Salavatipour) :

$$\chi(G^2) \leq \left\lceil \frac{5}{3} \Delta(G) \right\rceil + 78$$

Le cas planaire – Borne supérieure

Meilleure borne actuelle (Molloy and Salavatipour) :

$$\chi(G^2) \leq \left\lceil \frac{5}{3} \Delta(G) \right\rceil + 78$$

Quand Δ est grand (Amini, Esperet, van den Heuvel),

$$\chi(G^2) \leq \left(\frac{3}{2} + o(1) \right) \Delta$$

Le cas planaire – Borne inférieure

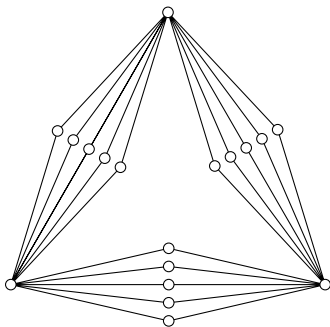


FIGURE : Construction de Wegner

$$\Rightarrow \chi(G^2) = \left\lfloor \frac{3}{2} \Delta(G) \right\rfloor + 1 \Rightarrow \chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1). \text{ 😞}$$

Le problème

Pour quelles classes de graphes peut-on garantir
 $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1)$?

Le problème

Pour quelles classes de graphes peut-on garantir
 $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1)$?

Pour grand $\Delta(G)$:

☹ Maille 4 : pas suffisant (Wegner).

Le problème

Pour quelles classes de graphes peut-on garantir
 $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1)$?

Pour grand $\Delta(G)$:

- ☹ Maille 4 : pas suffisant (Wegner).
- 😊 Maille $g \geq 7$: $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 1$ (Borodin et al., 2004).
- 😊 Maille $g \geq 6$: $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ (Borodin et al., 2004).
- 😊 Maille $g \geq 5$: $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ (Bonamy et al., 2015).

Le problème

Pour quelles classes de graphes peut-on garantir
 $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1)$?

Pour grand $\Delta(G)$:

- ☹ Maille 4 : pas suffisant (Wegner).
- 😊 Maille $g \geq 7$: $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 1$ (Borodin et al., 2004).
- 😊 Maille $g \geq 6$: $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ (Borodin et al., 2004).
- 😊 Maille $g \geq 5$: $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ (Bonamy et al., 2015).
- 😊 Pas C_4 ni C_5 : $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ (Dong and Xu, 2017).

Le problème

Pour quelles classes de graphes peut-on garantir $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1)$?

Pour grand $\Delta(G)$:

- ☹ Maille 4 : pas suffisant (Wegner).
- 😊 Maille $g \geq 7$: $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 1$ (Borodin et al., 2004).
- 😊 Maille $g \geq 6$: $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ (Borodin et al., 2004).
- 😊 Maille $g \geq 5$: $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ (Bonamy et al., 2015).
- 😊 Pas C_4 ni C_5 : $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$ (Dong and Xu, 2017).

But : identifier les cycles à interdire pour obtenir $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1)$.

Résultats

Théorème

En interdisant un nombre *fini* de longueurs de cycles :

- Si C_4 est autorisé, alors ~~$\chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1)$~~ . ☹️
- Si C_4 est interdit, alors $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 73$. 😊
- Si G est sans C_4 et $\Delta(G)$ est assez grand, alors $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$. 😊😊😊

Idées de la preuve

Déchargement sans décharger

Deux types de résultats :

- Tout graphe sans C_4 avec Δ assez grand contient certaines configurations.
→ Déchargement

Déchargement sans décharger

Deux types de résultats :

- Tout graphe sans C_4 avec Δ assez grand contient certaines configurations.
→ Déchargement
- Aucune configuration n'est présente dans un graphe minimal dont le carré n'est pas $(\Delta + 2)$ -coloriable.
→ Étendre des colorations partielles

Déchargement sans décharger

Deux types de résultats :

- Tout graphe sans C_4 avec Δ assez grand contient certaines configurations.
→ ~~Déchargement~~ Tiroirs !
- Aucune configuration n'est présente dans un graphe minimal dont le carré n'est pas $(\Delta + 2)$ -coloriable.
→ Étendre des colorations partielles

Étape 1 : Réductibilité

Une configuration C est réductible si pour tout G contenant C ,

$$\chi((G \setminus C)^2) \leq \Delta + 2 \Rightarrow \chi(G^2) \leq \Delta + 2$$

Exemple : sommets de degré 1.

Premières réductions

v est petit si $d_G(v) < \sqrt{\Delta}$.

Premières réductions

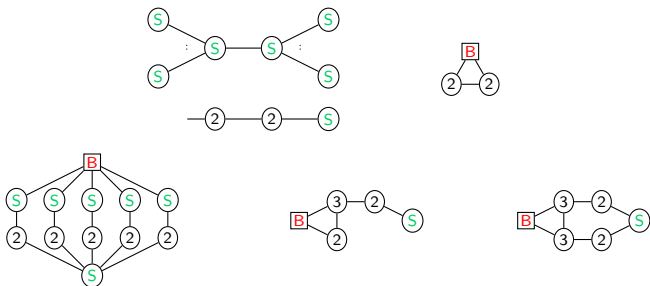
v est **petit** si $d_G(v) < \sqrt{\Delta}$.

Les **petits** sommets sont faciles à colorier \Rightarrow ils sont éloignés dans un contre-exemple minimum.

Premières réductions

v est **petit** si $d_G(v) < \sqrt{\Delta}$.

Les **petits** sommets sont faciles à colorier \Rightarrow ils sont éloignés dans un contre-exemple minimum.



Régions

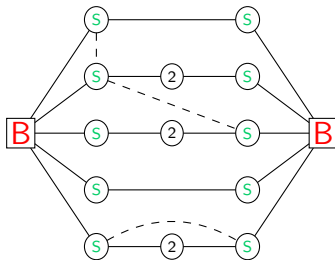
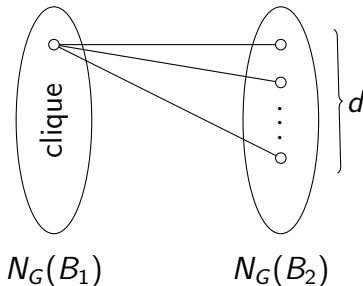
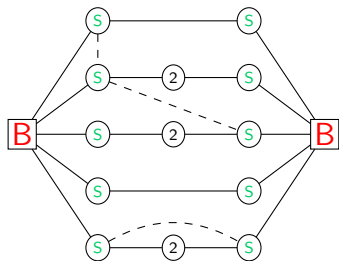
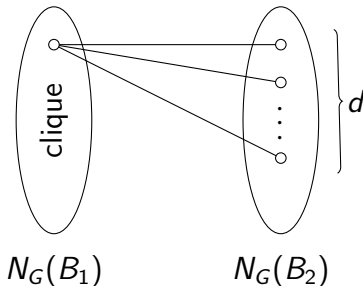
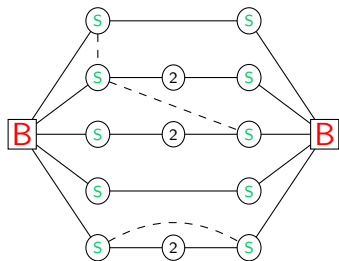


FIGURE : Une région de taille 5

Réductibilité des régions

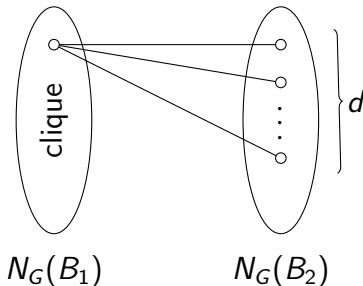
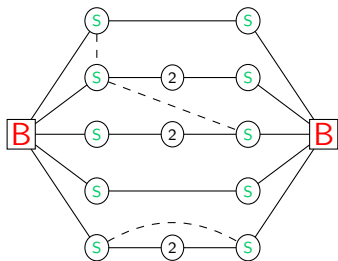


Réductibilité des régions



G planaire $\Rightarrow d \leq 11$.

Réductibilité des régions

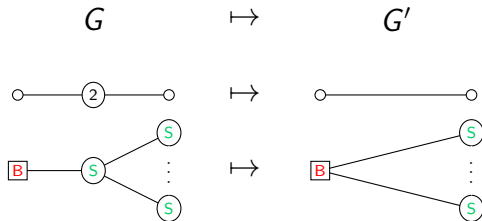


G planaire $\Rightarrow d \leq 11$.

Si $|\text{région}| \geq f(d)$, alors la région est réductible.

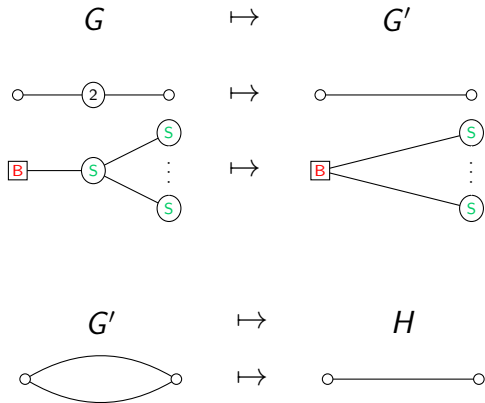
Étape 2 : Trouver une grande région

Soit G sans C_4 avec grand Δ .

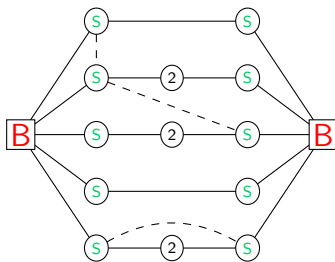


Étape 2 : Trouver une grande région

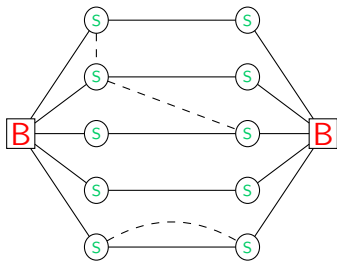
Soit G sans C_4 avec grand Δ .



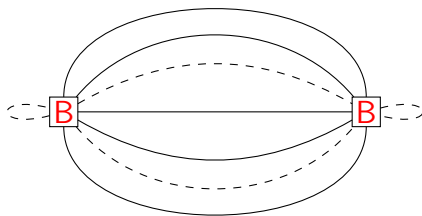
Transformation des régions



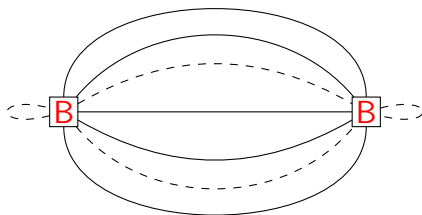
Transformation des régions



Transformation des régions



Transformation des régions



Région dans $G \Leftrightarrow$ Multi-arêtes dans G' .

- H planaire $\Rightarrow \exists u, d_H(u) \leq 5$.

- H planaire $\Rightarrow \exists u, d_H(u) \leq 5$. Mais si u est petit ? 😞

- H planaire $\Rightarrow \exists u, d_H(u) \leq 5$. Mais si u est petit ? 😞
- Dans G' , il y a plus de structure !

- H planaire $\Rightarrow \exists u, d_H(u) \leq 5$. Mais si u est **petit**? 😞
- Dans G' , il y a plus de structure!
- $\Rightarrow \exists u$ **grand** avec $d_H(u) \leq 40$! 😊

- H planaire $\Rightarrow \exists u, d_H(u) \leq 5$. Mais si u est **petit**? 😞
- Dans G' , il y a plus de structure!
- $\Rightarrow \exists u$ **grand** avec $d_H(u) \leq 40$! 😊
- Tiroirs $\Rightarrow u$ partage beaucoup d'arêtes dans G' avec un de ses voisins.

- H planaire $\Rightarrow \exists u, d_H(u) \leq 5$. Mais si u est **petit**? 😞
- Dans G' , il y a plus de structure!
- $\Rightarrow \exists u$ **grand** avec $d_H(u) \leq 40$! 😊
- Tiroirs $\Rightarrow u$ partage beaucoup d'arêtes dans G' avec un de ses voisins.

G contient une grande région!

Conclusion

Résultats

En interdisant un nombre *fini* de longueurs de cycles :

- Si C_4 est autorisé, alors ~~$\chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1)$~~ . 😞
- Si C_4 est interdit, alors $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 73$. 😊
- Si G est sans C_4 et $\Delta(G)$ est assez grand, alors $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$. 😊😊😊
- Extension aux colorations par liste/par correspondance.

Conclusion

Résultats

En interdisant un nombre *fini* de longueurs de cycles :

- Si C_4 est autorisé, alors ~~$\chi(G^2) \leq \Delta(G) + O(1)$~~ . ☹️
- Si C_4 est interdit, alors $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 73$. 😊
- Si G est sans C_4 et $\Delta(G)$ est assez grand, alors $\chi(G^2) \leq \Delta(G) + 2$. 😊😊😊
- Extension aux colorations par liste/par correspondance.

- Meilleure borne sur Δ ?
- Améliorer $\Delta + 73$?
- Quid d'interdire un nombre infini de longueurs de cycles ?
(Autoriser $C_4 \Rightarrow$ interdire tous les C_{4k+2} via Wegner.)

Merci pour votre attention.