Schéma de distance pour les graphes médians sans cube

Journées Graphes et Algorithmes

V. Chepoi, A. Labourel, S. Ratel

LIS, Aix-Marseille Université, Marseille, France

14 Novembre 2018

Schéma d'étiquetage de distance

Un **schéma d'étiquetage de distance** sur une famille de graphe $\mathcal{G}$ consiste en deux fonctions:

- Une fonction d'**encodage** qui:

  avec une **connaissance globale** d'un graphe $G \in \mathcal{G}$,
  attribue des étiquettes à ses sommets;

- Une fonction de **décodage** qui:

  avec une **connaissance restreinte** aux étiquettes de 2 sommets,
  calcule la distance exacte entre eux.

On souhaite généralement que les étiquettes soient

1. de taille poly-logarithmique;
2. déchiffrables en temps poly-logarithmique;
3. attribuées en temps polynomial.

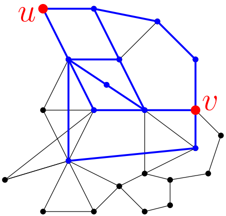
Graphes médians

L'**intervalle** $I(u,v)$ est l'ensemble des plus courts chemins entre $u, v \in V$ dans $G = (V, E)$.

Un **médian** de $u, v, w \in V$ est un sommet de $I(u,v) \cap I(v,w) \cap I(w,u)$.

G est **médian** si chaque $u, v, w \in V$ admet un **unique** sommet médian.

G est **sans-cube** s'il ne possède pas en tant que sous-graphe.



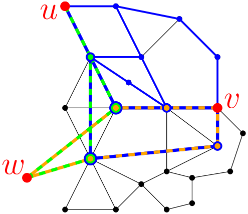
Graphes médians

L'**intervalle** $I(u, v)$ est l'ensemble des plus courts chemins entre $u, v \in V$ dans $G = (V, E)$.

Un **médian** de $u, v, w \in V$ est un sommet de $I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u)$.

G est **médian** si chaque $u, v, w \in V$ admet un **unique** sommet médian.

G est **sans-cube** s'il ne possède pas en tant que sous-graphe.



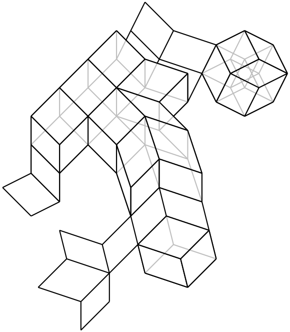
Graphes médians

L'**intervalle** $I(u, v)$ est l'ensemble des plus courts chemins entre $u, v \in V$ dans $G = (V, E)$.

Un **médian** de $u, v, w \in V$ est un sommet de $I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u)$.

G est **médian** si chaque $u, v, w \in V$ admet un **unique** sommet médian.

G est **sans-cube** s'il ne possède pas en tant que sous-graphe.



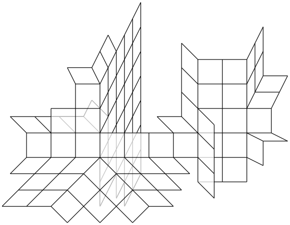
Graphes médians

L'**intervalle** $I(u, v)$ est l'ensemble des plus courts chemins entre $u, v \in V$ dans $G = (V, E)$.

Un **médian** de $u, v, w \in V$ est un sommet de $I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u)$.

G est **médian** si chaque $u, v, w \in V$ admet un **unique** sommet médian.

G est **sans-cube** s'il ne possède pas  en tant que sous-graphe.



portité et quasi-portité

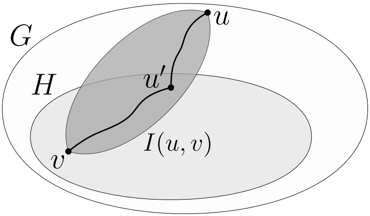
Soit $H \subseteq G$. Une **porte** de $u \notin H$ sur H est un sommet $u' \in H$ par lequel passe toujours un plus court chemin de u vers n'importe quel $v \in H$.

H est **porté** si tous les sommets de $G \setminus H$ ont une porte sur H. *i.e.,*

$$\forall u \notin H, \exists u' \in H, \forall v \in H, \quad \mathrm{d}(u,v) = \mathrm{d}(u,u') + \mathrm{d}(u',v).$$

$H \subseteq G$ est **quasi-porté** si $\forall u \notin H$, $\exists u', u'' \in H$ tel que $\forall v \in H$,

$$\mathrm{d}(u,v) = \min\{\mathrm{d}(u,u') + \mathrm{d}(u',v), \mathrm{d}(u,u'') + \mathrm{d}(u'',v)\}.$$



portité et quasi-portité

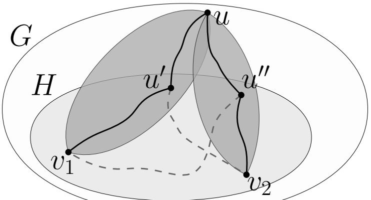
Soit $H \subseteq G$. Une **porte** de $u \notin H$ sur H est un sommet $u' \in H$ par lequel passe toujours un plus court chemin de u vers n'importe quel $v \in H$.

H est **porté** si tous les sommets de $G \setminus H$ ont une porte sur H. *i.e.,*

$$\forall u \notin H, \exists u' \in H, \forall v \in H, \quad \mathrm{d}(u,v) = \mathrm{d}(u,u') + \mathrm{d}(u',v).$$

$H \subseteq G$ est **quasi-porté** si $\forall u \notin H$, $\exists u', u'' \in H$ tel que $\forall v \in H$,

$$\mathrm{d}(u,v) = \min\{\mathrm{d}(u,u') + \mathrm{d}(u',v), \mathrm{d}(u,u'') + \mathrm{d}(u'',v)\}.$$



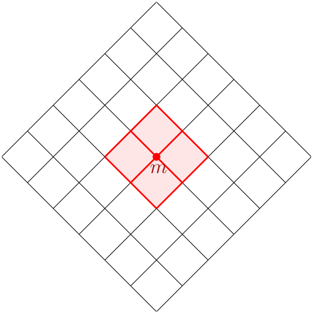
Partition de graphe médian

L'**étoile** $\text{Ét}(m)$ de m dans G est $\{u \in V : I(m,u)$ induit un cube de $G\}$.

Lemme. $\text{Ét}(m)$ est porté dans un graphe médian.

La **fibre** $F(x)$ de $x \in \text{Ét}(m)$ est l'ensemble des sommets G dont x est la porte sur $\text{Ét}(m)$.

Lemme. Si m est un sommet **médian** (minimisant $x \mapsto \sum_{u \in V} \mathrm{d}(u,x)$), alors l'union des fibres de $\text{Ét}(m)$ constituent une partition de G dans laquelle chaque partie induit un graphe médian d'au plus $\frac{|V|}{2}$ sommets.



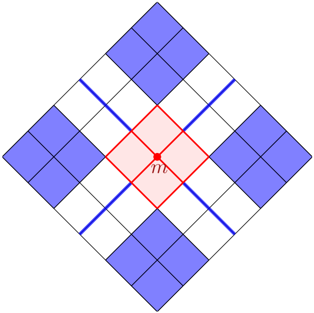
Partition de graphe médian

L'**étoile** $\text{Ét}(m)$ de m dans G est $\{u \in V : I(m,u) \text{ induit un cube de } G\}$.

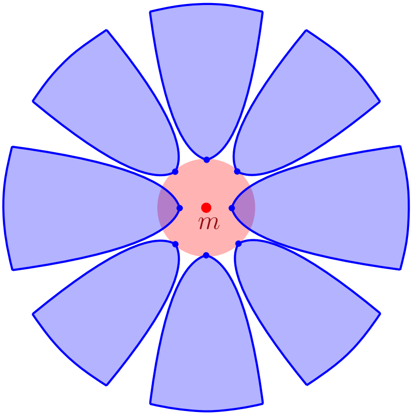
Lemme. $\text{Ét}(m)$ est porté dans un graphe médian.

La **fibre** $F(x)$ de $x \in \text{Ét}(m)$ est l'ensemble des sommets G dont x est la porte sur $\text{Ét}(m)$.

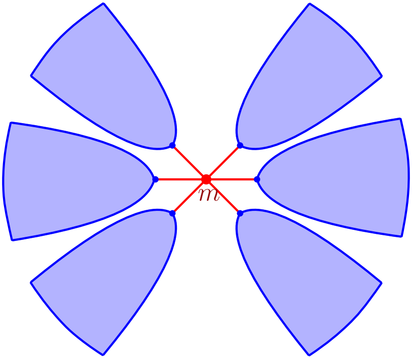
Lemme. Si m est un sommet **médian** (minimisant $x \mapsto \sum_{u \in V} \mathrm{d}(u,x)$), alors l'union des fibres de $\text{Ét}(m)$ constituent une partition de G dans laquelle chaque partie induit un graphe médian d'au plus $\frac{|V|}{2}$ sommets.



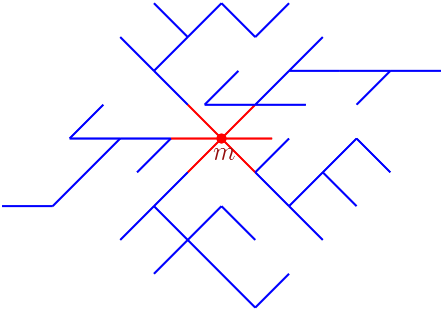
Idée du schéma



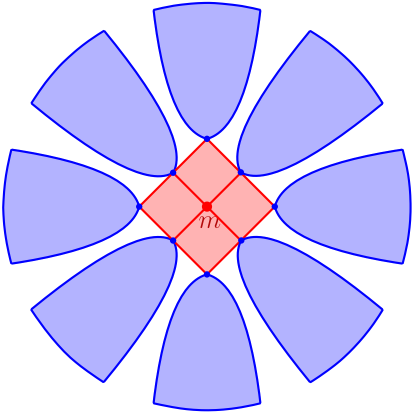
Idée du schéma



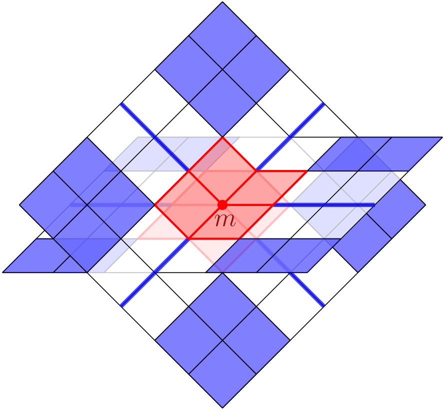
Idée du schéma



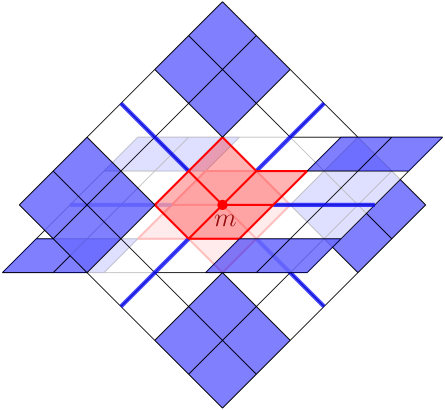
Idée du schéma



Idée du schéma



Idée du schéma

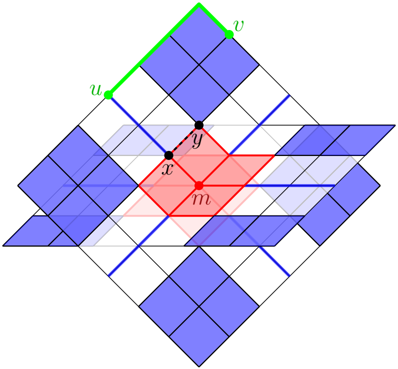


Deux types de fibres:

- des **panneaux** qui partent d'une porte à distance 1 de m;
- des **cônes** qui partent d'une porte à distance 2 de m;

Deux fibres $F(x)$ et $F(y)$ sont **voisines** si x et y sont voisins.

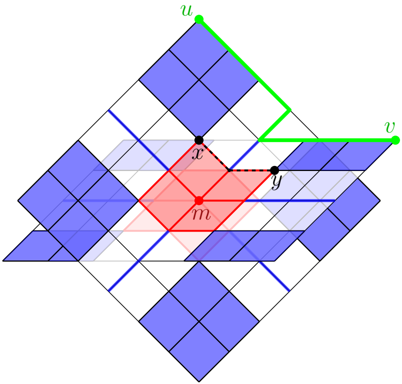
Classification des paires de sommets



$u \in F(x)$ et $v \in F(y)$ sont

- **1-voisins** si $\mathrm{d}(x, y) = 1$,
- **2-voisins** si $\mathrm{d}(x, y) = 2$ et $F(x)$ et $F(y)$ sont des cônes,
- **éloignés** dans les autres cas.

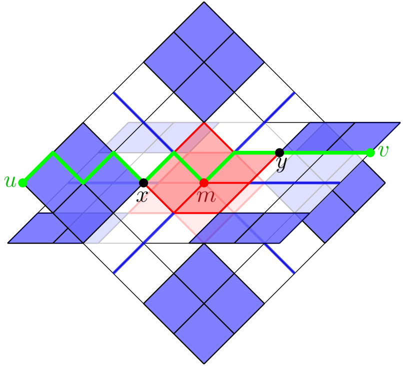
Classification des paires de sommets



$u \in F(x)$ et $v \in F(y)$ sont

- **1-voisins** si $\mathrm{d}(x, y) = 1$,
- **2-voisins** si $\mathrm{d}(x, y) = 2$ et $F(x)$ et $F(y)$ sont des cônes,
- **éloignés** dans les autres cas.

Classification des paires de sommets



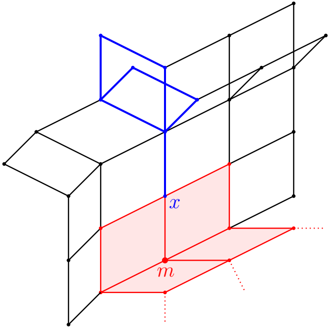
$u \in F(x)$ et $v \in F(y)$ sont

- **1-voisins** si $\mathrm{d}(x, y) = 1$,
- **2-voisins** si $\mathrm{d}(x, y) = 2$ et $F(x)$ et $F(y)$ sont des cônes,
- **éloignés** dans les autres cas.

Bords des fibres

La **frontière** d'une fibre $F(x)$ vers une fibre $F(y)$ est l'ensemble des sommets de $F(x)$ ayant un voisin dans $F(y)$.

La **bordure** d'une fibre F est l'union de ses frontières avec ses voisines.



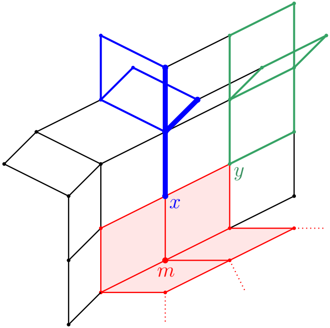
Lemme. La frontière entre deux fibres est un arbre porté.

Lemme. La bordure d'une fibre est un arbre isométrique quasi-porté.

Bords des fibres

La **frontière** d'une fibre $F(x)$ vers une fibre $F(y)$ est l'ensemble des sommets de $F(x)$ ayant un voisin dans $F(y)$.

La **bordure** d'une fibre F est l'union de ses frontières avec ses voisines.



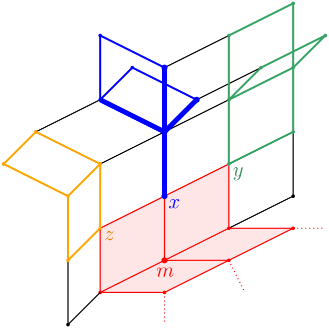
Lemme. La frontière entre deux fibres est un arbre porté.

Lemme. La bordure d'une fibre est un arbre isométrique quasi-porté.

Bords des fibres

La **frontière** d'une fibre $F(x)$ vers une fibre $F(y)$ est l'ensemble des sommets de $F(x)$ ayant un voisin dans $F(y)$.

La **bordure** d'une fibre F est l'union de ses frontières avec ses voisines.



Lemme. La frontière entre deux fibres est un arbre porté.

Lemme. La bordure d'une fibre est un arbre isométrique quasi-porté.

Schéma de distance pour les médians sans cube: Encodage

Théorème *(Peleg)*. Les sommets u d'un arbre T peuvent être étiquetés (par $\mathrm{L}_T(u)$) avec $O(\log^2 n)$ bits et décodés en temps $O(\log n)$.

Théorème. Les sommets u de $\text{Ét}(m)$ peuvent être étiquetés (par $\mathrm{L}_{\text{Ét}(m)}(u)$) avec $O(\log n)$ bits et décodés en temps $O(1)$.

ENCODAGE.

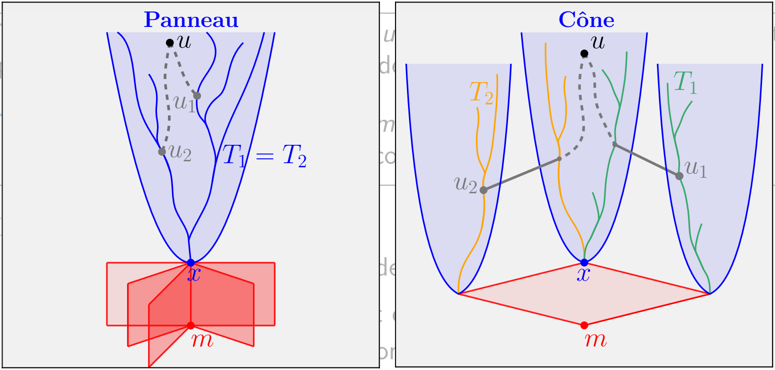
(1) Donner à chaque sommet u de G un identifiant unique $\mathrm{id}(u)$;

(2) Trouver le médian m de G et construire la partition;

(3) Ajouter au label de chaque sommet u les info suivantes:
- $\mathrm{id}(m)$, $\mathrm{d}(u, m)$, $\mathrm{L}_{\text{Ét}(m)}(x)$; *$x$ porte de u sur $\text{Ét}(m)$*
- $\mathrm{d}(u, u_1)$, $\mathrm{L}_{T_1}(u_1)$; *T_1, T_2 étant 2 frontières ou une même bordure*
- $\mathrm{d}(u, u_2)$, $\mathrm{L}_{T_2}(u_2)$; *u_1, u_2 portes de u vers des fibres "voisines"*

(4) retour en (2) pour chaque fibre (non triviale) de la partition;

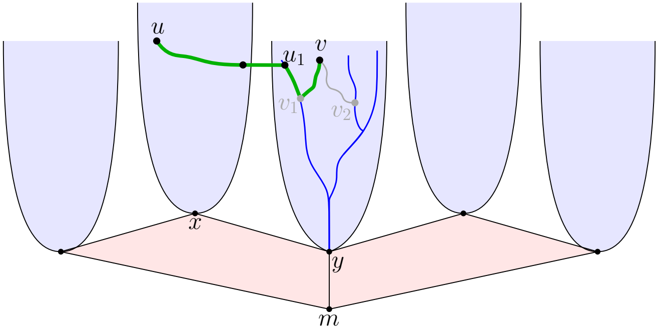
Schéma de distance pour les médians sans cube: Encodage



- id(m), d(u, m), $\mathrm{L}_{\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(m)}(x)$; *$x$ porte de u sur Ét(m)*
- d(u, u_1), $\mathrm{L}_{T_1}(u_1)$; *T_1, T_2 étant 2 frontières ou une même bordure*
- d(u, u_2), $\mathrm{L}_{T_2}(u_2)$; *u_1, u_2 portes de u vers des fibres "voisines"*

(4) retour en (2) pour chaque fibre (non triviale) de la partition;

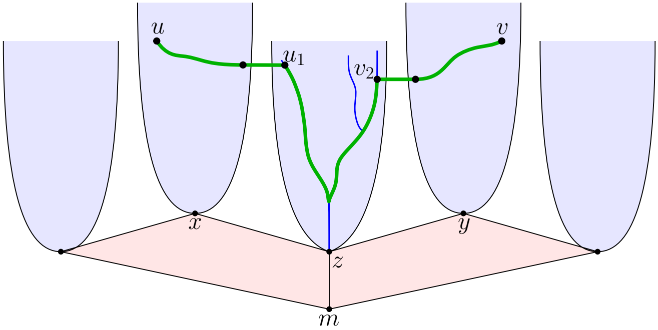
Schéma de distance pour les médians sans cube: Décodage



Lemme. Si u et v sont 1-voisins, alors

$$\mathrm{d}(u, v) = \mathrm{d}(u, u_1) + \min\{\mathrm{d}(v, v_1) + \mathrm{d}(v_1, u_1), \mathrm{d}(v, v_2) + \mathrm{d}(v_2, u_1)\}.$$

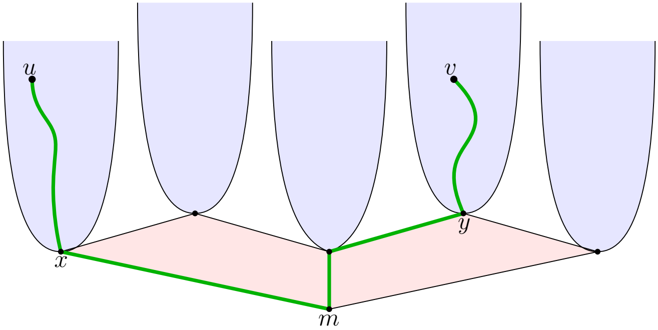
Schéma de distance pour les médians sans cube: Décodage



Lemme. Si u et v sont 2-voisins, alors

$$d(u, v) = d(u, u_1) + d(u_1, v_2) + d(v_2, v).$$

Schéma de distance pour les médians sans cube: Décodage



Lemme. u et v sont éloignés ssi $I(x,m) \cap I(y,m) = \{m\}$. Et alors

$$d(u,v) = d(u,m) + d(m,v).$$

Conclusion et questions

Théorème. La classe des graphes médians sans cubes admet un schéma d'étiquetage de distance avec:

- des étiquettes de taille $O(\log^3 n)$;
- un temps de décodage $O(\log^2 n)$.

Encoder ces graphes requiert un temps $O(n^2 \log n)$.

Question. La classe des graphes médians généraux admet-elle un schéma de distance avec étiquettes poly-logarithmiques ?

Merci pour votre attention