Trouver des spanners peu denses dans les cliques temporelles

Arnaud Casteigts, LaBRI, Bordeaux, arnaud.casteigts@labri.fr
Joseph G. Peters, Simon Fraser University, Canada, peters@cs.sfu.ca
Jason Schoeters, LaBRI, Bordeaux, jason.schoeters@labri.fr

November 14, 2018

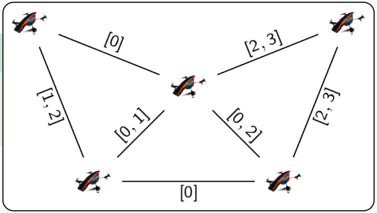
Table des matières

Introduction

Introduction

Définition graphe dynamique [3]

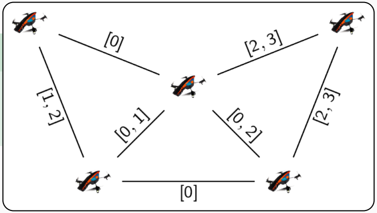
graphe avec modifications d'arêtes au cours de sa durée de vie

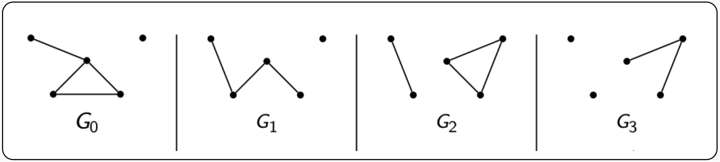


Introduction

Définition graphe dynamique [3]

graphe avec modifications d'arêtes au cours de sa durée de vie

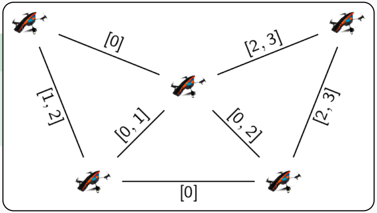


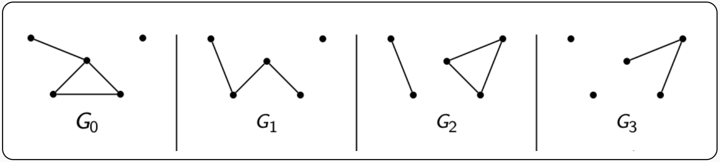


Introduction

Définition graphe dynamique [3]

graphe avec modifications d'arêtes au cours de sa durée de vie





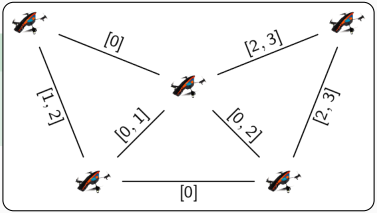
Définition chemin temporel

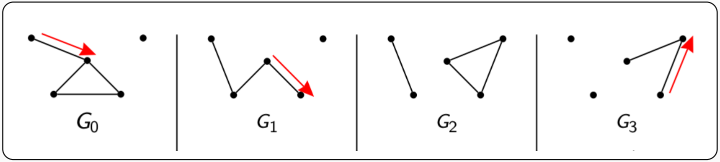
suite d'arêtes avec étiquettes croissantes

Introduction

Définition graphe dynamique [3]

graphe avec modifications d'arêtes au cours de sa durée de vie





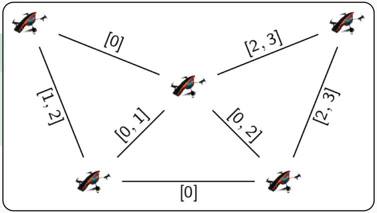
Définition chemin temporel

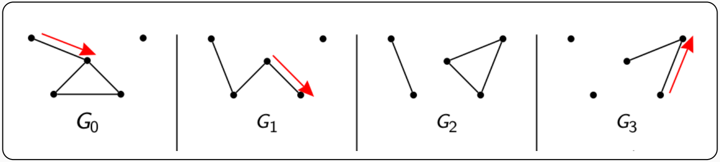
suite d'arêtes avec étiquettes croissantes

Introduction

Définition graphe dynamique [3]

graphe avec modifications d'arêtes au cours de sa durée de vie





Définition chemin temporel

suite d'arêtes avec étiquettes croissantes

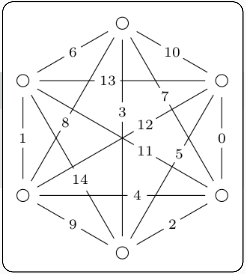
Définition graphe temporellement connexe

∃ chemin temporel entre toute paire de noeuds

Introduction

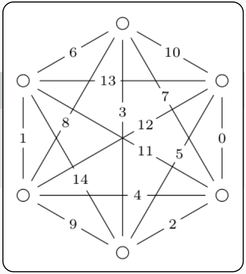
Fait

tout graphe complet est temporellement connexe



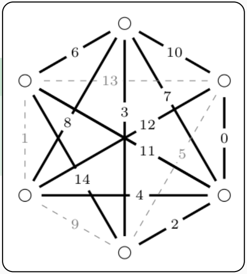
Fait

tout graphe complet est
temporellement connexe



Définition spanner temporel

sous-ensemble des arêtes
conservant la connexité temporelle



Introduction

Question [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

"Étant donné un graphe temporellement connexe,
existe-t-il toujours un spanner temporel peu dense ?"

Résultats

Résultats

Question [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

"Étant donné un graphe temporellement connexe,
existe-t-il toujours un spanner temporel peu dense ?"

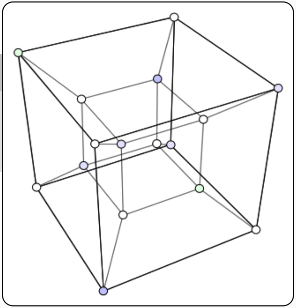
Résultats

Question [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

"Étant donné un graphe temporellement connexe,
existe-t-il toujours un spanner temporel peu dense ?"

Fait [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

$\exists$ famille infinie d'hypercubes temporels sans spanner de taille $o(n \log n)$



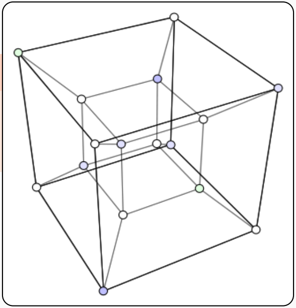
Résultats

Question [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

"Étant donné un graphe dense temporellement connexe, existe-t-il toujours un spanner temporel peu dense ?"

Fait [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

$\exists$ famille infinie d'hypercubes temporels sans spanner de taille $o(n \log n)$



Résultats

Question [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

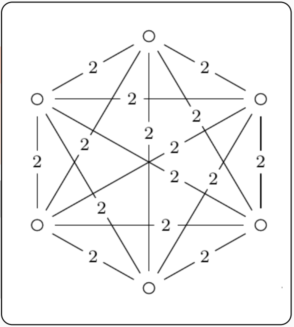
"Étant donné un graphe dense temporellement connexe, existe-t-il toujours un spanner temporel peu dense ?"

Fait [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

$\exists$ famille infinie d'hypercubes temporels sans spanner de taille $o(n \log n)$

Fait [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

$\exists$ famille infinie de cliques temporelles sans spanner de taille $o(n^2)$



Résultats

Question

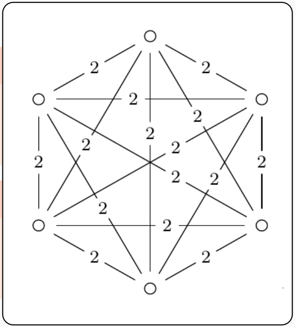
“Étant donné un graphe dense temporellement connexe avec étiquettes localement uniques, existe-t-il toujours un spanner temporel peu dense ?”

Fait [Kempe, Kleinberg et Kumar ’02] [5]

$\exists$ famille infinie d’hypercubes temporels sans spanner de taille $o(n \log n)$

Fait [Kempe, Kleinberg et Kumar ’02] [5]

$\exists$ famille infinie de cliques temporelles sans spanner de taille $o(n^2)$



Résultats

Question

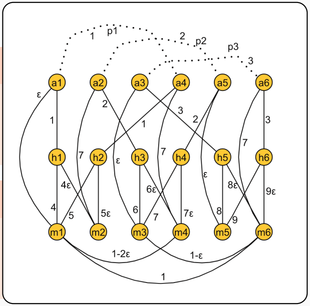
"Étant donné un graphe dense temporellement connexe avec étiquettes localement uniques, existe-t-il toujours un spanner temporel peu dense ?"

Fait [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

$\exists$ famille infinie d'hypercubes temporels sans spanner de taille $o(n \log n)$

Fait [Kempe, Kleinberg et Kumar '02] [5]

$\exists$ famille infinie de cliques temporelles sans spanner de taille $o(n^2)$



Théorème [Axiotis et Fotakis '16] [2]

$\exists$ famille infinie de graphes dynamiques denses sans spanner de taille $o(n^2)$

Résultats

Question

“Étant donné une clique temporelle,
avec étiquettes localement uniques, existe-t-il
toujours un spanner temporel peu dense ?”

Résultats

Question

“Étant donné une clique temporelle,
avec étiquettes localement uniques, existe-t-il
toujours un spanner temporel peu dense ?”

Théorème [Akrida, Gasienic, Mertzios et Spirakis ’17] [1]

$\forall$ clique avec étiquettes localement uniques,
on peut retirer au moins $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ arêtes

Résultats

Question

“Étant donné une clique temporelle,
avec étiquettes localement uniques, existe-t-il
toujours un spanner temporel peu dense ?”

Théorème [Akrida, Gasienic, Mertzios et Spirakis ’17] [1]

$\forall$ clique avec étiquettes localement uniques,
on peut retirer au moins $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ arêtes $\implies$ spanner de taille $O(n^2)$

Résultats

Question

“Étant donné une clique temporelle,
avec étiquettes localement uniques, existe-t-il
toujours un spanner temporel peu dense ?”

Théorème [Akrida, Gasienic, Mertzios et Spirakis ’17] [1]

$\forall$ clique avec étiquettes localement uniques,
on peut retirer au moins $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ arêtes $\implies$ spanner de taille $O(n^2)$

Remarque [Casteigts, Peters et S. ’18] [4]

$\forall$ clique avec étiquettes localement uniques,
on peut retirer au moins $\approx \frac{m}{6}$ arêtes

Résultats

Question

“Étant donné une clique temporelle,
avec étiquettes localement uniques, existe-t-il
toujours un spanner temporel peu dense ?”

Théorème [Akrida, Gasienic, Mertzios et Spirakis ’17] [1]

$\forall$ clique avec étiquettes localement uniques,
on peut retirer au moins $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ arêtes $\implies$ spanner de taille $O(n^2)$

Remarque [Casteigts, Peters et S. ’18] [4]

$\forall$ clique avec étiquettes localement uniques,
on peut retirer au moins $\approx \frac{m}{6}$ arêtes $\implies$ spanner de taille $O(n^2)$

Résultats

Théorème [Casteigts, Peters et S. '18] [4]

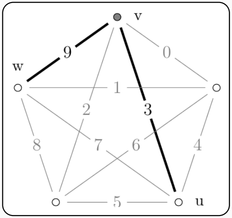
$\forall$ clique avec étiquettes localement uniques,
$\exists$ spanner de taille $O(n \log n)$

Technique $O(n \log n)$

Démontabilité

Définition clique démontable

$\exists$ noeud v dans clique $\mathcal{K}$ avec voisins u, w *t.q.*
arête *min* de $u = uv$ et arête *max* de $w = vw$



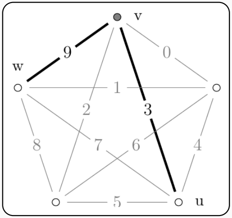
Démontabilité

Définition clique démontable

$\exists$ noeud v dans clique $\mathcal{K}$ avec voisins u, w *t.q.*
arête *min* de $u = uv$ et arête *max* de $w = vw$

Lemme

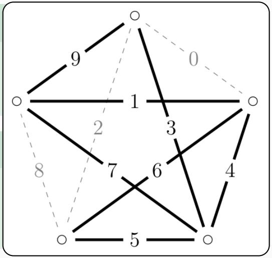
On obtient un spanner de $\mathcal{K}$,
en rajoutant uv et vw à un spanner de $\mathcal{K} \setminus v$



Démontabilité

Définition clique démontable

$\exists$ noeud v dans clique $\mathcal{K}$ avec voisins u, w *t.q.* arête *min* de $u = uv$ et arête *max* de $w = vw$

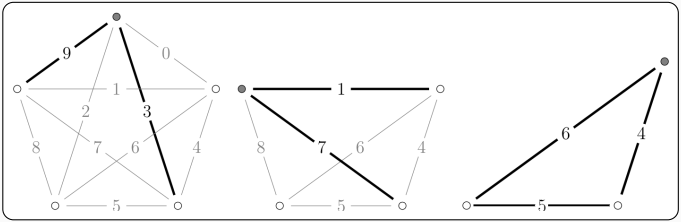


Lemme

On obtient un spanner de $\mathcal{K}$,
en rajoutant uv et vw à un spanner de $\mathcal{K} \setminus v$

Théorème

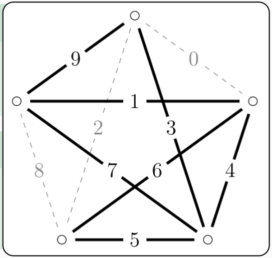
si $\mathcal{K}$ complètement démontable,
alors $\exists$ un spanner de taille $\Theta(n)$



Démontabilité

Définition clique démontable

$\exists$ noeud v dans clique $\mathcal{K}$ avec voisins u, w *t.q.*
arête *min* de $u = uv$ et arête *max* de $w = vw$



Lemme

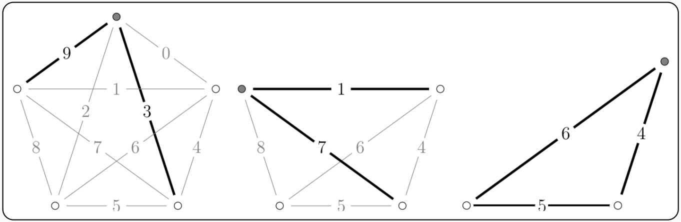
On obtient un spanner de $\mathcal{K}$,
en rajoutant uv et vw à un spanner de $\mathcal{K} \setminus v$

Théorème

si $\mathcal{K}$ complètement démontable,
alors $\exists$ un spanner de taille $\Theta(n)$

Fait

$\exists$ famille infinie de cliques temporelles non-démontables



Feux d’artifice

Idée : *déléguer* ses émissions à un voisin

Feux d’artifice

Idée : *déléguer* ses émissions à un voisin

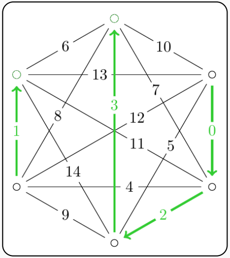
Construction feux d’artifice d’émission

Feux d'artifice

Idée : *déléguer* ses émissions à un voisin

Construction feux d'artifice d'émission

- $\forall$ arête min de v, uv : $u \to v$

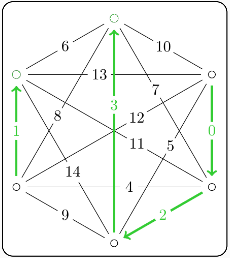


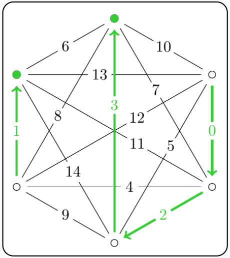
Feux d'artifice

Idée : *déléguer* ses émissions à un voisin

Construction feux d'artifice d'émission

- $\forall$ arête min de v, uv : $u \to v$
- arbres à 1 feuille/émetteur



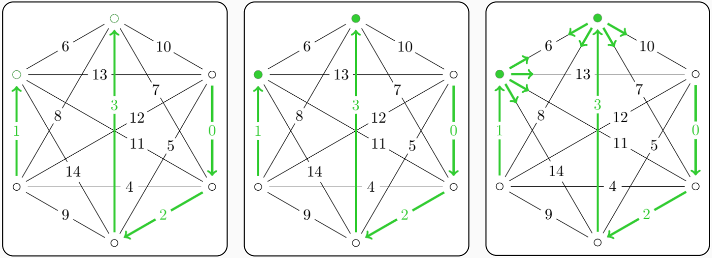


Feux d'artifice

Idée : *déléguer* ses émissions à un voisin

Construction feux d'artifice d'émission

- $\forall$ arête min de v, uv : $u \to v$
- arbres à 1 feuille/émetteur
- $\forall$ arêtes des émetteurs f, fg : $f \to g$

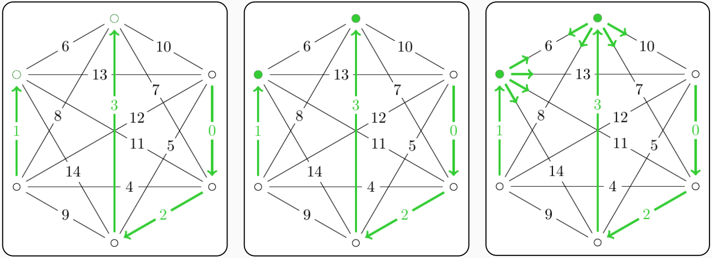


Feux d'artifice

Idée : *déléguer* ses émissions à un voisin

Construction feux d'artifice d'émission

- $\forall$ arête min de v, uv : $u \to v$
- arbres à 1 feuille/émetteur
- $\forall$ arêtes des émetteurs f, fg : $f \to g$



Remarque

feux d'artifice d'émission forment un spanner (de taille $\dfrac{3m}{4} + o(m)$)

Feux d’artifice

Idée : *déléguer* ses réceptions à un voisin

Feux d'artifice

Idée : *déléguer* ses réceptions à un voisin

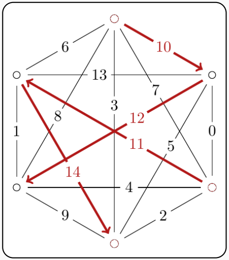
Construction feux d'artifice de réception

Feux d'artifice

Idée : *déléguer* ses réceptions à un voisin

Construction feux d'artifice de réception

- $\forall$ arête max de v, vw : $v \rightarrow w$

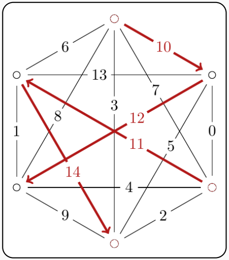


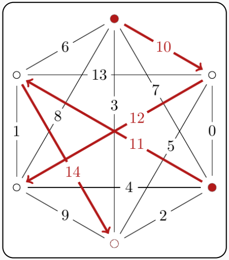
Feux d'artifice

Idée : *déléguer* ses réceptions à un voisin

Construction feux d'artifice de réception

- $\forall$ arête max de v, vw : $v \to w$
- arbres à 1 racine/récepteur



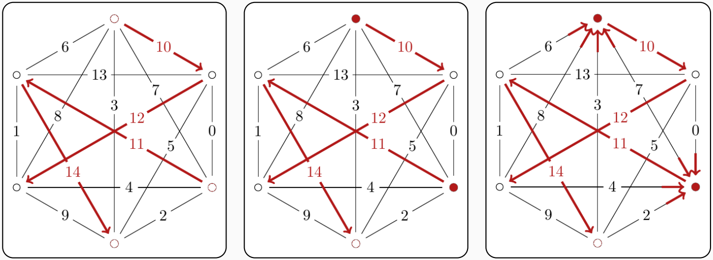


Feux d'artifice

Idée : *déléguer* ses réceptions à un voisin

Construction feux d'artifice de réception

- $\forall$ arête max de v, vw : $v \to w$
- arbres à 1 racine/récepteur
- $\forall$ arêtes des récepteurs r, qr : $q \to r$

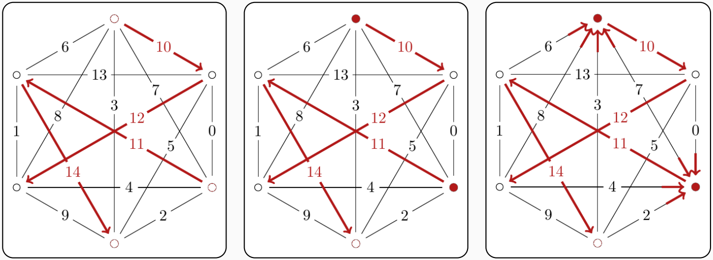


Feux d'artifice

Idée : *déléguer* ses réceptions à un voisin

Construction feux d'artifice de réception

- $\forall$ arête max de v, vw : $v \to w$
- arbres à 1 racine/récepteur
- $\forall$ arêtes des récepteurs r, qr : $q \to r$



Remarque

feux d'artifice de réception forment un spanner (de taille $\frac{3m}{4} + o(m)$)

Feux d’artifice

Idée : combiner feux d’artifice d’émission et de réception

Feux d’artifice

Idée : combiner feux d’artifice d’émission et de réception

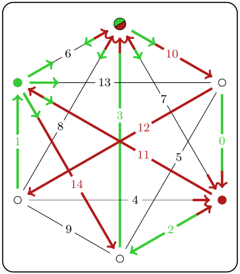
Construction feux d’artifice combinés

Feux d’artifice

Idée : combiner feux d’artifice d’émission et de réception

Construction feux d’artifice combinés

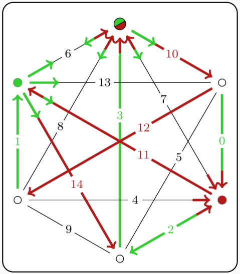
- construire feux d’artifice d’émission et de réception

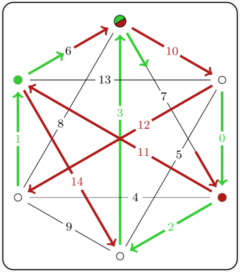


Idée : combiner feux d’artifice d’émission et de réception

Construction feux d’artifice combinés

- construire feux d’artifice d’émission et de réception
- ∀ arêtes d’émetteur/récepteur : garder que arêtes entre émetteur et récepteur



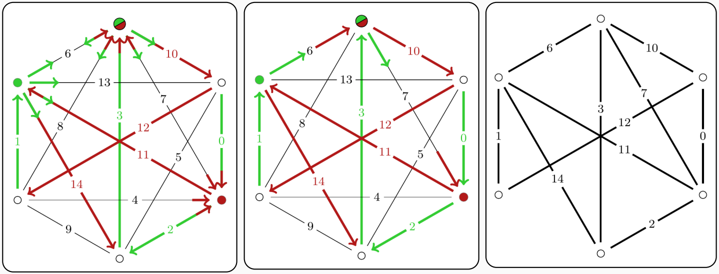


Feux d'artifice

Idée : combiner feux d'artifice d'émission et de réception

Construction feux d'artifice combinés

- construire feux d'artifice d'émission et de réception
- $\forall$ arêtes d'émetteur/récepteur : garder que arêtes entre émetteur et récepteur

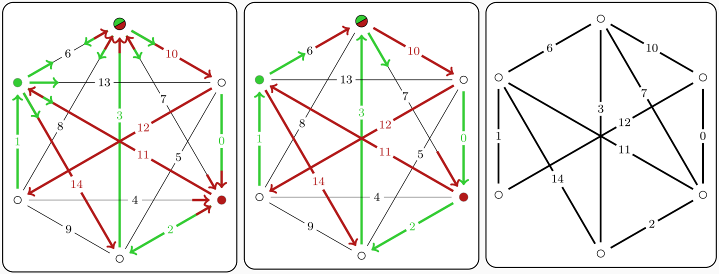


Feux d'artifice

Idée : combiner feux d'artifice d'émission et de réception

Construction feux d'artifice combinés

- construire feux d'artifice d'émission et de réception
- $\forall$ arêtes d'émetteur/récepteur : garder que arêtes entre émetteur et récepteur



Remarque

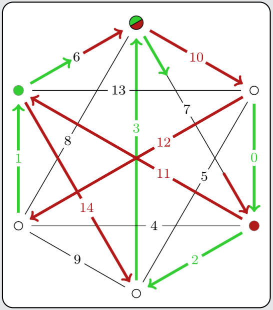
feux d'artifice combinés forment un spanner (de taille $\frac{m}{2} + o(m)$)

Structure après feux d'artifice

Cas 1 : $\exists$ noeud non-émetteur et non-récepteur

Structure après feux d'artifice

Cas 1 : ∃ noeud non-émetteur et non-récepteur

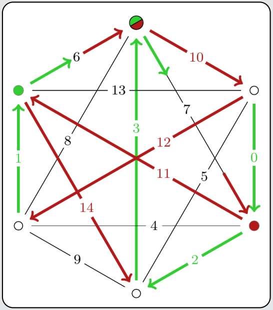


Structure après feux d'artifice

Cas 1 : $\exists$ noeud non-émetteur et non-récepteur

Lemme

$\mathcal{K}$ est démontable



Structure après feux d'artifice

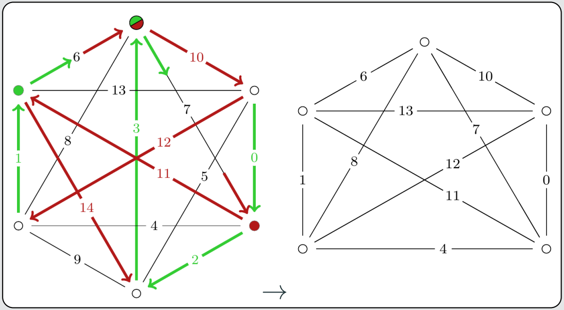
Cas 1 : $\exists$ noeud non-émetteur et non-récepteur

Lemme

$\mathcal{K}$ est démontable (en $\mathcal{K}'$)

Solution

recommencer les feux d'artifice sur $\mathcal{K}'$



Structure après feux d'artifice

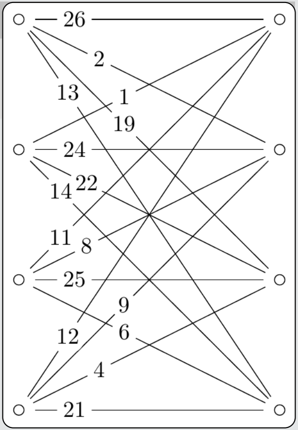
Cas 2 : tout noeud est émetteur ou récepteur

Structure après feux d'artifice

Cas 2 : tout noeud est émetteur ou récepteur

Fait

le spanner des feux d'artifices induit un graphe biparti complet



Structure après feux d'artifice

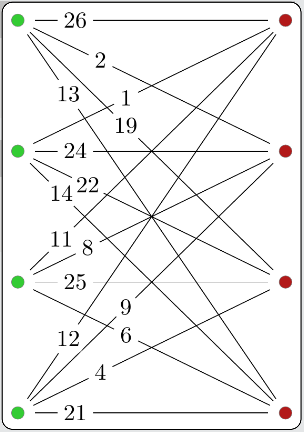
Cas 2 : tout noeud est émetteur ou récepteur

Fait

le spanner des feux d'artifices induit un graphe biparti complet

Fait

les $n/2$ émetteurs (*resp.* récepteurs) forment un stable



Structure après feux d'artifice

Cas 2 : tout noeud est émetteur ou récepteur

Fait

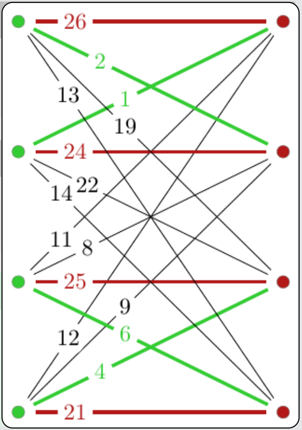
le spanner des feux d'artifices induit un graphe biparti complet

Fait

les $n/2$ émetteurs (*resp.* récepteurs) forment un stable

Lemme

les arêtes max des récepteurs (*resp.* min des émetteurs) forment un couplage parfait



Structure après feux d'artifice

Cas 2 : tout noeud est émetteur ou récepteur

Fait

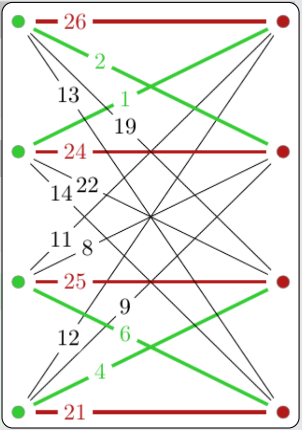
le spanner des feux d'artifices induit un graphe biparti complet

Fait

les $n/2$ émetteurs (*resp.* récepteurs) forment un stable

Lemme

les arêtes max des récepteurs (*resp.* min des émetteurs) forment un couplage parfait



Solution

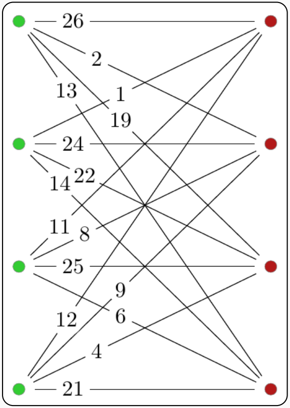
trouver "spanner" temporelle des émetteurs **vers** récepteurs

Cas biparti

Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur

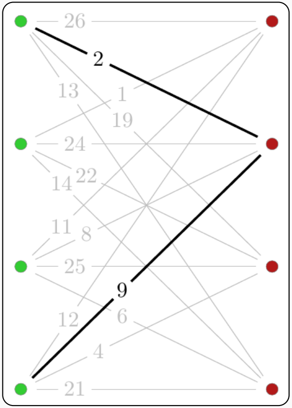
Cas biparti

Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur



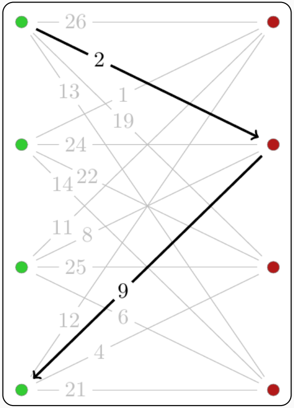
Cas biparti

Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur



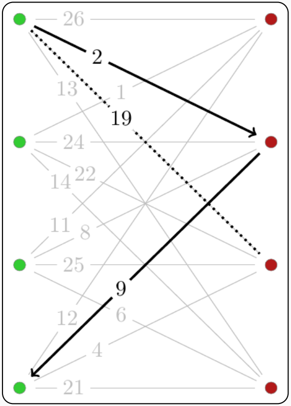
Cas biparti

Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur



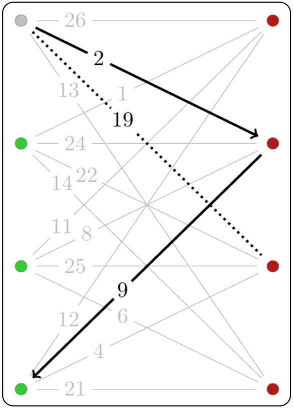
Cas biparti

Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur



Cas biparti

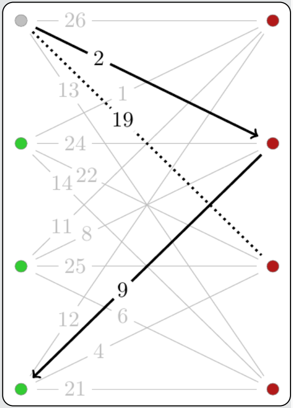
Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur



Cas biparti

Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur

Construction "spanner" des émetteurs vers récepteurs



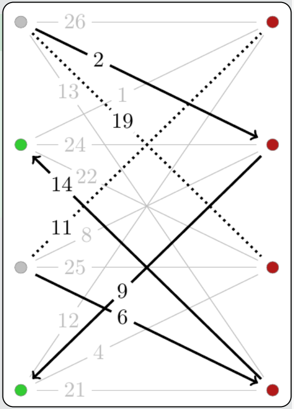
Cas biparti

Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur

Construction "spanner" des émetteurs vers récepteurs

Lemme

On délègue ainsi de $\frac{n}{2}$ émetteurs à $\frac{n}{4}$ émetteurs, en utilisant au plus $\frac{n}{4}(2+1) = O(n)$ arêtes



Cas biparti

Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur

Construction "spanner" des émetteurs vers récepteurs

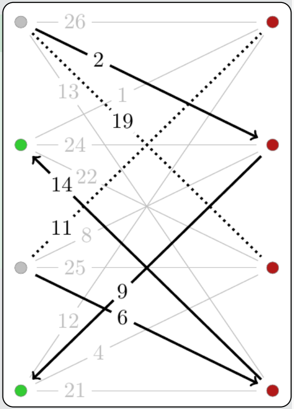
Lemme

Par itération $i \leq \log \frac{n}{2}$:

On délègue ainsi de $\frac{n}{2^i}$ émetteurs

à $\frac{n}{2^{i+1}}$ émetteurs, en utilisant au plus

$\frac{n}{2^{i+1}}(2 + 2^{i+1} - 3) = O(n)$ arêtes



Cas biparti

Idée : délégations partielles d'émissions d'émetteur vers émetteur

Construction "spanner" des émetteurs vers récepteurs

Lemme

Par itération $i \leq \log \frac{n}{2}$:

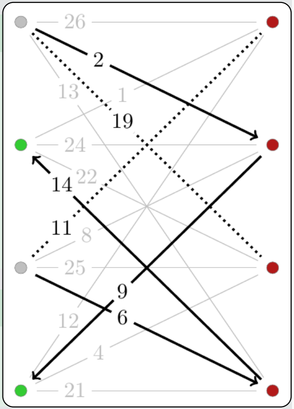
On délègue ainsi de $\frac{n}{2^i}$ émetteurs

à $\frac{n}{2^{i+1}}$ émetteurs, en utilisant au plus

$\frac{n}{2^{i+1}}(2 + 2^{i+1} - 3) = O(n)$ arêtes

Lemme

Le dernier émetteur et ses arêtes assurent la connexité temporelle vers les récepteurs



Cas Biparti

Lemme

$\exists$ "spanner" des émetteurs **vers** les récepteurs
de taille $O(n \log n)$ dans le graphe biparti complet

Cas Biparti

Lemme

∃ "spanner" des émetteurs **vers** les récepteurs
de taille $O(n \log n)$ dans le graphe biparti complet

$$\downarrow$$

Lemme

∃ spanner de taille $O(n \log n)$ dans le graphe biparti complet

Cas Biparti

Lemme

∃ "spanner" des émetteurs **vers** les récepteurs
de taille $O(n \log n)$ dans le graphe biparti complet

$\downarrow$

Lemme

∃ spanner de taille $O(n \log n)$ dans le graphe biparti complet

$\downarrow$

Théorème

∃ spanner de taille $O(n \log n)$ dans toute clique dynamique

Conclusion

Conclusion

- $\exists$ spanner peu dense dans n'importe quelle clique

Conclusion

- $\exists$ spanner peu dense dans n'importe quelle clique
  - de taille $O(n \log n)$

Conclusion

- $\exists$ spanner peu dense dans n'importe quelle clique
  - de taille $O(n \log n)$
  - de taille $o(n \log n)$?

Conclusion

- $\exists$ spanner peu dense dans n'importe quelle clique
  - de taille $O(n \log n)$
  - de taille $o(n \log n)$?
  - de taille $O(n)$?

Conclusion

- $\exists$ spanner peu dense dans n'importe quelle clique
  - de taille $O(n \log n)$
  - de taille $o(n \log n)$?
  - de taille $O(n)$?
- $\nexists$ spanner peu dense dans n'importe quel graphe dense

Conclusion

- $\exists$ spanner peu dense dans n'importe quelle clique
  - de taille $O(n \log n)$
  - de taille $o(n \log n)$?
  - de taille $O(n)$?
- $\nexists$ spanner peu dense dans n'importe quel graphe dense
- Existe-t-il un seuil de densité à partir duquel on peut trouver des spanners peu dense dans n'importe quelle graphe ?

Merci de votre attention

References I

E. C. Akrida, L. Gąsieniec, G. B. Mertzios, and P. G. Spirakis.
The complexity of optimal design of temporally connected graphs.
Theory of Computing Systems, 61(3):907–944, 2017.

K. Axiotis and D. Fotakis.
On the size and the approximability of minimum temporally connected subgraphs.
arXiv preprint arXiv:1602.06411, 2016.

A. Casteigts, P. Flocchini, W. Quattrociocchi, and N. Santoro.
Time-varying graphs and dynamic networks.
International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems, 27(5):387–408, 2012.

References II

A. Casteigts, J. G. Peters, and J. Schoeters.
Temporal cliques admit sparse spanners.
arXiv preprint arXiv:1810.00104, 2018.

D. Kempe, J. Kleinberg, and A. Kumar.
Connectivity and inference problems for temporal networks.
Journal of Computer and System Sciences, 64(4):820–842, 2002.