<u>LR</u> (Szemerédi, 1975) : $\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon) \,/\, \forall G$ graphe, $\exists$ partition ε-régulière en $\leq M$ parts

$$M \leq \text{tour}(\lceil 2\varepsilon^{-5} \rceil) \quad \text{où} \quad \text{tour}(k) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\Big\} k$$

<u>Thm</u> (Gowers, 1997) : $\exists c > 0, \eta_c > 0 \,/\, \forall \varepsilon \in (0, \eta_c), \exists G$ graphe dont toute partition ε-régulière comporte au moins $\text{tour}(\lceil \varepsilon^{-c} \rceil)$ parts

<u>LST</u> (Rusza-Szemerédi, 1978) : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{RS} > 0 \,/\, \forall G$ graphe,

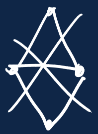
$\#\{K_3 \subseteq G\} \geq \delta_{RS} |V(G)|^3$ ou $\exists F \subseteq E(G) \,/\, \omega(G - F) \leq 2$ & $|F| < \varepsilon |V(G)|^2$

$$\delta_{RS} = \frac{1}{\text{tour}(\varepsilon^{-O(1)})} \text{ convient}$$

Fox (2011) : $\dfrac{1}{\text{tour}(O(\log(1/\varepsilon)))}$ convient

Behrend (1946)
$\Rightarrow \exists c > 0 \,/\, \delta_{RS} < \varepsilon^{c \log(1/\varepsilon)}$

Déf. : $G \models (\Delta)_n \iff \left\{ \begin{array}{l} G \text{ graphe à } n \text{ sommets} \\ \& \text{ chaque arête de } G \text{ est dans 1 \& 1 seul triangle} \end{array} \right.$



$\forall n, \quad t(n) = \max \{ |E(G)| \,/\, G \models (\Delta)_n \}$

Thm : $t(n) \underset{n \to \infty}{=} o(n^2)$

Dém. : Soit $\varepsilon > 0$. $[\exists n_0 / n > n_0 \Rightarrow t(n) < \varepsilon n^2]$

Soit $\delta_{RS} = \delta_{RS}(\varepsilon)$ donné par le LST. $\exists n_0 / n > n_0 \Rightarrow n^2 < \delta_{RS} n^3$

$G \models (\Delta)_n$: $\#\{K_3 \subseteq G\} = \dfrac{|E(G)|}{3} = \dfrac{t(n)}{3} < n^2 < \delta_{RS} n^3$

$|E(G)| = t(n)$

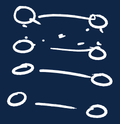
LST $\Rightarrow \exists F \subseteq E(G) \,/\, \omega(G - F) \leq 2, \; |F| < \varepsilon n^2$

$\Downarrow$

$|F| \geq \#\{K_3 \subseteq G\} \geq \dfrac{t(n)}{3}$ $\Rightarrow t(n) < 3\varepsilon n^2$

Déf : $\mathcal{H} \models (6,3)_n \iff \begin{cases} \mathcal{H} \text{ hypergraphe 3 uniforme à } n \text{ sommets} \\ \& \ \forall V_6 \subseteq V(\mathcal{H}),\ |V_6| = 6 \Rightarrow |E(\mathcal{H}[V_6])| \le 2 < 3 \end{cases}$

$\forall n, \quad h(n) = \max \{ |E(\mathcal{H})| \,/\, \mathcal{H} \models (6,3)_n \}$



Thm : $h(n) = \Theta(t(n)) = \Theta(c(n))$

Déf : $G \models (-)_n \iff \begin{cases} G \text{ graphe à } n \text{ sommets} \\ \& \ E(G) \text{ se partitionne en } n \text{ couplages induits} \end{cases}$

$\forall n, \quad c(n) = \max \{ |E(G)| \,/\, G \models (-)_n \}$

(P) $h(n) - n \le t(n) \le c(n) \le 2h(2n)$

$G \models (\triangle)_n \Rightarrow G \models (-)_n \qquad \forall v,$

$M_v = \{ \{x,y\} \in E(G) \,/\, x \sim v \sim y \}$ est un couplage induit

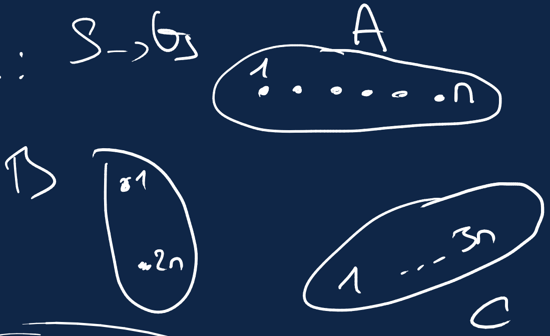
$\bigcup_{v \in V(G)} M_v = E(G)$

$v \neq v' \Rightarrow M_v \cap M_{v'} = \emptyset$

Thm [Roth, 1953] : $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ si S sans PA$_3$ $\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in S$
$x+z = 2y \Rightarrow x = y = z$
alors $|S| = o(n)$

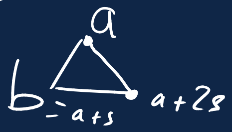
$$r_3(n) = \max\{ |S| \,/\, S \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ sans PA}_3 \}$$

Dém. : $S \to G_S$

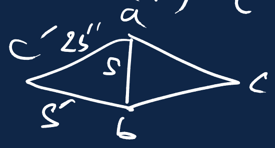


$V(G) = A \,\dot\cup\, B \,\dot\cup\, C$ $\quad |V(G)| = 6n$
$(a,b,c) \in A \times B \times C$
$a \sim b \Leftrightarrow b-a \in S$
$b \sim c \Leftrightarrow b-c \in S$
$c \sim a \Leftrightarrow c-a \in 2S$
$|E(G)| = 4n|S|$

$G_S \models (\Delta)_{6n} \Rightarrow 4n|S| = o(36n^2) \Rightarrow |S| = o(n)$



$b - a = s \in S$
$c = b + s \in C$ $\quad c - b = s$
$c - a = 2s$



$2s'' = s + s'$
$c' - a = (c' - b) + (b - a)$
$s \neq s', s''$ ↯

$$r_3(n) \leq \frac{n}{(\log^* n)^c} \quad (LR)$$

$$r_3(n) \leq \frac{n}{\log\log n} \quad [\text{Roth}]$$

$$r_3(n) \leq \frac{n}{(\log n)^{1+c}} \quad [\text{Bloom-Sisask, 2020}]$$

$$r_3(n) \leq n e^{-c(\log n)^{1/9}} \quad [\text{Bloom-Sisask, 2023}]$$

$\downarrow$ optimisé

$1/7$

$1/12$ Kelley-Meka, 2023

1. Méthode gloutonne : $A_0 = \{0\}$

$\forall k \geq 0$, $C_k = \{x \in \{0,\dots,n\} \setminus A_k \;/\; A_k \cup \{x\}$ sans $PA_3\}$

Si $C_k \neq \emptyset$ alors $\alpha_k = \min C_k$

$A_{k+1} \leftarrow A_k \cup \{\alpha_k\}$

$k \leftarrow k+1$

$\mathcal{A}_\epsilon$ $\alpha_\epsilon = n+1$

Sinon renvoyer A_k

déf. $x \models (72)$ ($\Leftrightarrow$ x n'admet pas de 2 dans son développement en base 3)

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble final.

$\mathcal{A} = \{x \in \{0,\dots,n\} \;/\; x$ n'admet pas de 2 dans son développement en base 3$\}$

$|\mathcal{A}| = 2^{\lfloor \log_3 n \rfloor}$

$\Bigg(A_k = \{x \in \{0,\dots,\alpha_{k-1}\} \;/\; x \models (72)\}$

$\forall z \in \{\alpha_{k-1}+1,\dots,\alpha_k - 1\}$, $x \not\models (72)\}$

$\alpha_k \models (72) \Bigg)$ $\boxed{(H_k)}$

$z \in \{\alpha_{k-1}+1, \dots, \alpha_k - 1\}$ $\exists\, x, y \in A_k \,/\, x+z = 2y$, $x<y$

$\boxed{HR1}$

$x = \sum x_i 3^i$, $x_i \in \{0,1\}$

$\exists i \,/\, y_i = 1 \;\&\; x_i = 0$

$(2y)_i = 2y_i = 2$

$(x+z)_i = x_i + z_i$

$z = \alpha_k \models (72)$

$\hookrightarrow$ $x = \sum x_i 3^i$ où $x_i = \begin{cases} 0 & \text{si } z_i \in \{0,2\} \\ 1 & \text{si } z_i = 1 \end{cases}$

$y = \sum y_i 3^i$ $\quad y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } z_i = 0 \\ 1 & \text{si } z_i \in \{1,2\} \end{cases}$

$x, y \models (72)$ $\Rightarrow x, y \in A_k$

Si $z \not\models (72)$, $x < y < z \Rightarrow x + z = 2y$ ↯ ∎

2. Moser (1952) : $r_3(n) \geq \boxed{n^{1 - \frac{3.5\sqrt{2\log 2}}{\sqrt{\log n}}}}$

poids faible

$x = B_r \text{---} B_i \text{---} B_1 \quad \leq n \qquad 2^{\binom{r+1}{2}} - 1 \leq n < 2^{\binom{r+2}{2}} - 1$

$\mathcal{A} = \{ B_r - B_1 /$ c1) $\forall i \in \{1, \dots, r-2\}$, le chiffre le plus à gauche de B_i est 0

c2) $\overline{B_r B_{r-1}}^{(2)} = \sum_{i=1}^{r-2} (\overline{B_i}^{(2)})^2 \}$

$\boxed{r = 7}$

$x = 9321946 = \qquad 2_{r-1}$

$\underbrace{0000100|011100}|\underbrace{0|1111|0111|011|01|0}$

$4 + 8 + 16 + 256 = 284 = 1^2 + 3^2 + 7^2 + 15^2$

$x, z \in \mathcal{A}, \quad \frac{x+z}{2} \notin \mathcal{A}$

$r > \sqrt{2\log n} - 1$

$|\mathcal{A}| = \prod_{i=1}^{r-2} 2^{i-1} = 2^{\frac{(r-3)(r-2)}{2}}$

3. Behrend (1946) : $\{1,\dots,N\}^d \xrightarrow{\varphi} \{1,\dots,n\}$

sans PA_3 $\longrightarrow$ sans PA_3

$x+z=2y \Longleftarrow \varphi(x)+\varphi(z)=2\varphi(y)$

Déf : $A_i \subseteq \Gamma_i$, Γ_i groupe abélien

$\varphi : A_1 \to A_2$ tel que $\forall a,b,c,d \in A_1$

$a+b=c+d \Rightarrow \varphi(a)+\varphi(b)=\varphi(c)+\varphi(d)$

hom. de Freiman

Si en outre φ est bijective & φ^{-1} est un hom. de Freiman

φ est un iso. de Freiman

$n \in \mathbb{N}$ / $N \in \mathbb{N}$ / $(2N-1)^d \leq n < (2N+1)^d$

$$\varphi : \{0, \dots, N-1\}^d \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(a_0, \dots, a_{d-1}) \longmapsto \sum_{i=0}^{d-1} a_i (2N-1)^i$$

injectif

φ est bijective de $\{0, \dots, N-1\}^d$ sur $\varphi(\text{—})$

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(c) + \varphi(d) \Rightarrow a+b = c+d$$

$$\sum \underbrace{(a_i+b_i)}_{\in \{0, \dots, 2N-2\}} (2N-1)^i = \sum \underbrace{(c_i+d_i)}(2N-1)^i$$

$$a_i + b_i = c_i + d_i$$

$\{0, \dots, N-1\}^d$ se partitionne en sphères :

$$S_r = \{ a \in \{0, \dots, N-1\}^d \,/\, \sum_{i=0}^{d-1} a_i^2 = r \}, \quad r \in \{0, \dots, d(N-1)^2\}$$

$$\exists r \,/\, |S_r| \geq \frac{N^d}{1 + d(N-1)^2} > \frac{N^{d-2}}{d}$$

$\varphi(S_r) \subseteq \{0, \dots, (2N-1)^d\}$ sans PA3

$$d = \lfloor \sqrt{2\log_2 n} \rfloor$$

$$r_3(n) \geq n^{1 - \frac{2\sqrt{2\log 2} + o(1)}{\sqrt{\log n}}}$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$r_3(n) \xrightarrow{t(n)} \delta_{RS}$$

$$\delta_{RS} < \frac{1}{\max\{n / t(n) \geq 3\varepsilon n^2\}}$$

$$N_\varepsilon = \max\{n / t(n) \geq 3\varepsilon n^2\}$$

valide car $t(n) = o(n^2)$

$$\delta = \frac{1}{N_\varepsilon}$$

$$G \models (\Delta)_{N_\varepsilon} \; / \; |E(G)| = t(N_\varepsilon)$$

$$\#\{K_3 \subseteq G\} = \frac{t(N_\varepsilon)}{3} < N_\varepsilon^2 = \delta N_\varepsilon^3$$

$$F \subseteq E(G) / \omega(G - F) \leq 2 \Rightarrow |F| \geq \frac{t(N_\varepsilon)}{3} \geq \varepsilon N_\varepsilon^2 \quad \blacksquare$$