Ordres universels pour le voyageur de commerce

Proposition de stage de Master 2 ENS de Lyon (2024)

Stage dans l'équipe *Optimisation Combinatoire* du Laboratoire G-SCOP (Grenoble), encadré par Louis Esperet `louis.esperet@grenoble-inp.fr`.

1 Contexte

Dans le problème du voyageur de commerce on a un graphe G et un sous-ensemble S de sommets, et l'on cherche un tour qui visite tous les sommets de S et qui est le plus court possible. Des heuristiques classiques dans la grille consistent à trouver un ordre total sur les sommets de G tel que pour tout ensemble S, parcourir les sommets de S dans l'ordre prescrit donne une solution qui est proche de l'optimal. On peut montrer que si l'on considère tous les ensembles S de taille k dans la grille (et plus généralement dans le plan Euclidien), on peut obtenir de cette manière des solutions qui sont optimales à un facteur multiplicatif $O(\log k)$ près, pour un certain ordre (non trivial à trouver) [3].

Ces resultats dans la grille ont été généralisé ces dernières années à des classes plus générales (des familles de dimension Assouad-Nagata bornée [1, 2], qui contiennent les graphes planaires et de manière plus générale toutes les classes closes par mineur).

2 Projet de recherche

Dans les résultats mentionnés ci-dessus, le facteur multiplicatif entre le tour obtenu en suivant l'ordre des sommets de S, et le tour optimal est de l'ordre $\log |S|$. Dans ce stage on s'intéressera plutôt aux classes de graphes où l'on peut garantir que le facteur multiplicatif est constant. De manière plus précise, la question est la suivante : quelles sont les classes de graphes pour lesquelles il existe une constante c, telle que tout graphe dans la classe a un ordre sur ses sommets, tel que pour tout graphe G et tout sous-ensemble S de sommets de G, suivre un tour qui visite les sommets de S dans l'ordre (selon un plus court chemin entre toute paire de sommets consécutifs dans l'ordre) donne une solution qui coûte au plus c fois la solution optimale ?

Le stage demande juste des connaissances de base en théorie des graphes et en algorithmique. Ce sera l'occasion de découvrir (ou d'approfondir) des notions de théorie métrique des graphes et d'optimisation combinatoire. Le stage pourra également s'ouvrir sur de nombreuses questions récentes à l'intersection de la théorie structurelle des graphes et de la géométrie, et déboucher sur une thèse.

Références

[1] A. Erschler and I. Mitrofanov, *Assouad-Nagata dimension and gap for ordered metric spaces*, to appear in Commentarii Mathematici Helvetici. `https://arxiv.org/abs/2109.12181`

[2] L. Jia, G. Lin, G. Noubir, R. Rajaraman, and R. Sundaram, *Universal approximations for TSP, Steiner tree, and set cover*, STOC'05 : Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM, New York, 2005, pp. 386–395.

[3] L. K. Platzman and J. J. Bartholdi III, *Spacefilling curves and the planar travelling salesman problem*, J. ACM **36** (1989), 719–737.